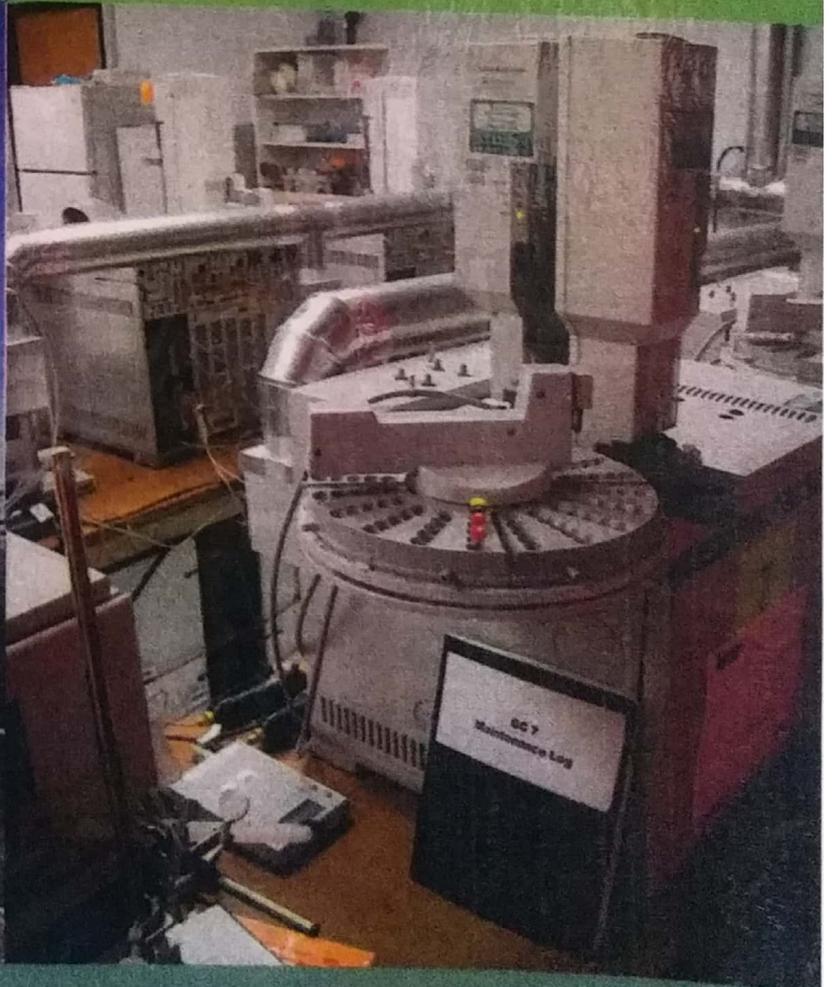


ANALISIS SISTIM TEKNIK KIMIA



Kiagus Ahmad Roni, ST., MT., Ph.D.
Netty Herawati, ST., MT.

**Dilarang memperbanyak, mencetak atau menerbitkan
Sebagian maupun seluruh buku ini tanpa izin tertulis dari penerbit**

Ketentuan Pidana

Kutipan Pasal 72 Undang-undang Republik Indonesia

Nomor 19 Tahun 2002 Tentang Hak Cipta

1. Barang siapa dengan sengaja dan tanpa hak melakukan sebagaimana dimaksud dalam pasal 2 ayat (1) atau pasal 49 ayat (1) dan ayat (2) dipidana dengan pidana penjara masing-masing paling singkat 1 (satu) bulan dan/atau denda paling sedikit Rp. 1.000.000,00 (satu juta rupiah), atau pidana penjara paling lama 7 (tujuh) tahun dan/atau denda paling banyak Rp. 5.000.000,00 (lima juta rupiah).
2. Barang siapa dengan sengaja menyiarkan, memamerkan, mengedarkan, atau menjual kepada umum suatu ciptaan atau barang hasil pelanggaran Hak Cipta atau hak terkait sebagaimana dimaksud pada ayat (1) dipidana dengan pidana penjara paling lama 5 (lima) tahun dan/atau denda paling banyak Rp. 500.000.000,00 (lima ratus juta rupiah).

ANALISIS SISTIM TEKNIK KIMIA

Penulis : Kiagus Ahmad Roni, ST., MT., Ph.D

Netty Herawati, ST., MT

Layout : Tri Septiana Kebela

Desain Cover : Haryono

Diterbitkan Oleh :

Rafah Press bekerja sama dengan Lembaga Penelitian dan Pengabdian
Kepada Masyarakat UIN RF Palembang

Perpustakaan Nasional Katalog dalam Terbitan (KDT) Anggota IKAPI

Dicetak oleh :

CV. Amanah

Jl. KH. Mayor Mahidin No. 142

Telp/Fax : 366 625

Palembang- Indonesia 30126

E-mail : noerfikri@gmail.com

Cetakan I : Februari 2020

16,25 x 25

X, 214

Hak Cipta dilindungi undang-undang pada penulis

All Right Reserved

ISBN : 978-623-250-172-0

ANALISIS SISTIM TEKNIK KIMIA

Dr. Kiagus Ahmad Roni, ST., MT.

Netty Herawati, ST., MT.

BIODATA PENULIS BUKUA
ANALISIS SISTEM TEKNIK KIMIA



Dr. Ir. Kiagus Ahmad Roni, MT. Lahir di Palembang, 27 Juli 1970. Penulis Lulus S1 di Program Studi Teknik Kimia Fakultas Teknik Universitas Muhammadiyah Palembang tahun 1993, lulus S2 Teknik Kimia di Program Pascasarjana Universitas Gadjah Mada Yogyakarta tahun 1998, dan lulus S3 bidang Kimia Fisika di Universitas Bordeaux Prancis tahun 2008. Saat ini penulis adalah dosen tetap Program Studi Teknik Kimia Fakultas Teknik Universitas Muhammadiyah Palembang s1 dan s2. Mengampu Matakuliah Kimia Fisika, Operasi Teknik Kimia, Perpindahan Massa, Analisis Sistem Teknik Kimia, Metodologi Penelitian dan Teknologi Minyak Bumi. Aktif menulis artikel diberbagai jurnal nasional maupun internasional.



Netty Herawati, ST., MT. Lahir Di Palembang 25 Januari 1976. Penulis Lulus S1 di Program Studi Teknik Kimia Fakultas Teknik Universitas Sriwijaya Tahun 2000, Lulus S2 di Program Pascasarjana Universitas Sriwijaya Tahun 2007, Saat Ini Penulis adalah Dosen Tetap Program Studi Teknik Kimia Fakultas Teknik Universitas Muhammadiyah Palembang. Mengampu Matakuliah Kimia Fisika, Operasi Teknik Kimia, Analisis Sistem Teknik Kimia.

KATA PENGANTAR

Buku Ajar Analisa Sistem Teknik Kimia merupakan buku yang dipergunakan oleh mahasiswa program studi Teknik Kimia sebagai buku rujukan, terutama bagi mahasiswa yang sedang mengikuti Mata Kuliah Analisis sistem teknik kimia pada semester V.

Buku ini mengkaji konsep-konsep, prinsip, dan pendekatan didalam Mata Kuliah Analisis Sistem Teknik Kimia. Mahasiswa diharapkan dapat memahami difisisi sistem dan analisis sistem, derajat kebebasan, peristiwa perpindahan, perpindahan massa, perpindahan momentum, perpindahan panas, dan optimasi

Buku ini mempunyai tiga tujuan pokok yaitu dari segi kognitif, psikomotor dan dari segi afektif. Setelah menyelesaikan Mata Kuliah analisis sistem teknik kimia ini Mahasiswa diharapkan memiliki kompetensi dibidang analisis sistem dalam proses teknik kimia

Proses pembelajaran yang disajikan dalam buku in yaitu pembelajaran partisipatif, pembelajaran individual dan kelompok.

Penulis menyadari bahwa buku ini jauh daripada sempurna dan lengkap tetapi diharapkan sudah dapat member bantuan seperlunya bagi para peminat dan mahasiswa dalam memperoleh pengetahuan dalam bidang ilmu teknik kimia. Kepada semua pihak yang telah berupaya membantu dalam menyempurnakan buku ajar ini sehingga layak untuk diterbitkan kami mengucapkan banyak terima kasih. Kami masih mengharapkan segala saran, kritik, dan umpan balik guna penyempurnaan buku ini semoga buku ajar ini bermanfaat bagi kita semua

Palembang, Februari 2020

Penulis

DAFTAR ISI

	Halaman
PENDAHULUAN	i
A. Ringkasan Mata Kuliah	ii
B. Pokok-Pokok Bahasan	ii
C. Tagihan	ii
D. Pertemuan, Tugas Individu/kelompok, Pokok bahasan dan Rujukan	iii
E. Sumber	ii
F. Pelaksanaan Perkuliahan	iv
BAB 1 DEFINISI SISTEM DAN ANALISIS SISTEM	1
1. Pengertian Sistem	1
2. Karakteristik Sistem	2
3. Klasifikasi Sistem	4
4. Pengertian Analisis Sistem	5
5. Fungsi Analisis Sistem	6
Evaluasi	6
Buku Sumber, Bacaan Pendukung	6
BAB 2 DERAJAT KEBEBASAN DALAM SUATU SISTEM	8
1. Definisi dan Konsep Dasar Derajat Kebebasan	8
2. Menentukan Derajat Kebebasan	9
3. Studi Kasus Derajat Kebebasan	9
4. Contoh Derajat Kebebasan dalam Suatu Sistem	19
Evaluasi	28
Buku Sumber, Bacaan Pendukung	28
BAB 3 PERISTIWA PERPINDAHAN	30
1. Peristiwa Perpindahan	30
2. Hukum Kekekalan	31
Evaluasi	32
Buku Sumber, Bacaan Pendukung	32
BAB 4 PERPINDAHAN MASSA	33
1. Difusi	33
2. Perpindahan Massa	35
3. Koefisien Pindah Massa	37
4. Teori lapisan	40
5. Penyebaran Konsentrasi	42
6. Perpindahan Panas dan Massa secara Bersamaan	50
Evaluasi	56
Buku Sumber, Bacaan Pendukung	56
BAB 4 PERPINDAHAN MOMENTUM	58
1. Aliran Berlapis	58
2. Aliran dalam Pipa	77
3. Aliran Bergolak	79
4. Selisih Tekanan aliran dalam Pipa	81

5. Aliran dalam Saluran luas Penampang Berubah	82
Evaluasi	99
Buku Sumber, Bacaan Pendukung	99
BAB 6 PERPINDAHAN PANAS	100
1. Definisi perpindahan Panas	100
2. Persamaan Energi	101
3. Penerapan Persamaan Energi	103
4. Perpindahan Panas secara Konduksi	110
5. Perpindahan Panas secara Konveksi	113
6. Perpindahan Panas secara Radiasi	119
Evaluasi	123
Buku Sumber, Bacaan Pendukung	123
BAB 7 OPTIMASI	125
1. Pengertian Optimasi	125
2. Jenis-jenis sistem	125
3. Kondisi Optimum	126
4. Permasalahan Optimasi	128
Evaluasi	140
Buku Sumber, Bacaan Pendukung	140



UNIVERSITAS MUHAMMADIYAH PALEMBANG

FAKULTAS TEKNIK

JURUSAN TEKNIK KIMIA

Jl. Jend. A. Yani 13 Ulu Palembang Telp. 0711-510820

A. RINGKASAN MATA KULIAH

Mata kuliah ini mengkaji konsep-konsep, prinsip, pendekatan di dalam Analisa pada suatu peralatan atau sistem. Dengan belajar Analisis Sistem Teknik Kimia, Mahasiswa diharapkan dapat memahami Definisi Sistem, Derajat kebebasan pada suatu sistem, Peristiwa perpindahan, perpindahan momentum, perpindahan panas/energy, perpindahan massa, dan membahas optimasi pada suatu peralatan atau sistem

Mata kuliah ini mempunyai tiga tujuan pokok, yaitu dari segi kognitif, dan dari segi afektif. Setelah menyelesaikan matakuliah Analisis Sistem Teknik Kimia ini, mahasiswa diharapkan memiliki kompetensi:

1. Kognitif

Memahami:

- a. Definisi system dan permasalahan yang ada pada suatu sistem,
- b. Derajat kebebasan pada suatu sistem,
- c. Peristiwa perpindahan,
- d. Perpindahan momentum,
- e. Perpindahan massa,
- f. Optimasi.

Menganalisis:

- a. masalah yang terjadi pada suatu sistem
- b. hubungan aspek yang mempengaruhi perhitungan pada suatu sistem

2. Afektif

Menerapkan:

- a. pemahamannya dalam analisis suatu peralatan,
- b. pemahamannya dalam perancangan suatu peralatan.

Proses pembelajaran dilakukan melalui pembelajaran partisipatif. Di dalamnya mencakup penggunaan metode pembelajaran individual dan kelompok. Pembelajaran individual berkaitan dengan telaah kepustakaan dan tugas penyusunan analisis kritis terhadap problem di dalam Analisis Sistem Teknik Kimia, refleksi diri, dan jurnal belajar yang diharapkan dapat membantu mahasiswa dalam menemukan solusi problem tersebut. Pembelajaran kelompok dilakukan dalam penyusunan laporan tugas baik buku-buku yang diwajibkan maupun laporan-laporan

B. POKOK-POKOK BAHASAN

Mata kuliah ini mencakup pokok-pokok kajian/bahasan yang dirangkum menjadi 7 bab sebagai berikut:

1. Definisi Sistem
2. Derajat Kebebasan dalam suatu sistem
3. Peristiwa perpindahan
4. Perpindahan Momentum
5. Perpindahan panas atau energi
6. Perpindahan Massa
7. Optimasi

C. TAGIHAN

1. Presensi dalam perkuliahan
2. Penyusunan dan penyajian makalah individual atau kelompok
3. Partisipasi dalam diskusi kelompok atau kelas
4. Pembuatan Tugas secara individu atau kelompok
5. Ujian tengah semester dan
6. Ujian akhir semester.

D. PERTEMUAN, TUGAS INDIVIDU/KELOMPOK, POKOK BAHASAN, DAN RUJUKAN

Pertemuan	Presentasi Individu/ Kelompok	Pokok Bahasan	Sumber
1	-	Penjelasan Kontrak Kuliah, Pendahuluan	
2-3	-	Definisi sistem	
4-5	2-3	Derajat kebebasan	
6-7	-	Peristiwa perpindahan	
7-8	2-3	Perpindahan momentum	
9-10	2-3	Perpindahan energi	

11-12	2-3	Perpindahan massa	
13-14	2-3	Optimasi	
15	-	Diskusi Akhir	
16	-	UAS	

E. SUMBER

Book, N.L. and Ramirez., W.F., 1976,"The Selection of Design Variables in System of Algebraic Equation"

Coulson, J.Design of Chemical Process", McGraw-Hill Book Company, New York

Douglas, J.M., 1988, "conceptual Design of Chemical Processes"

Lee, W. and Rudd, D.F., 1966, " On the Ordering of Recycle Calculation", 1966, AIChE Journal, Vol 12, No. 6, November 1966, pp. 1184-1190

Lee, W. James H.Christense&Dale F.Rudd, "Design Variabel selection to simplify Process Calculations". AIChE Journal, vol 12 No.6 Nov 1966 pp-1104-1110

Linnhoff, B., and Flower, J.R., 1978, "Syntesis of Heat Exchanger Networks", AIChEJ, vol. 24.

Norman, R., L., May 1965, "A Matrix method for location of cycles of a Directed Graph. AIChE Journal, Vol. 11, No. 3, pp. 450-452

Rudd, D.F and Watson, C.C., 1968, " Strategy of Process Engineering", John Wiley & Sons, New York

Stoecker, W.F., 1989, "Design of Thermal System", Mc Graw Hill International Edition, Singapore.

TJipto, 1981, 'Pengantar Peristiwa Perpindahan', Departemen Teknologi Kimia, ITB-ITT Naderland

Townsend, D.W., and Linnhoff, B., 1982, "Designing Total Energy System by Systematic Methode", Chem. Eng. No.378, London

F. PELAKSANAAN PERKULIAHAN

1. Metode yang digunakan; Ceramah, Diskusi, dan Penugasan.
2. Setiap mahasiswa tidak boleh memakai sandal, tidak boleh memakai *T-shirt* apalagi *ballon T-shirt* dan bagi para mahasiswi diwajibkan memakai jilbab.
3. Batas toleransi kedatangan ke dalam kelas 15 menit setelah jadwal yang ditentukan, lebih dari 15 menit Anda tidak diperkenankan mengikuti perkuliahan.
4. Kegiatan belajar mengajar:
 - a. Melakukan analisis kritis, menyusun dan melaporkan hasilnya dengan cara presentasi di depan kelas berdasarkan jadwal yang telah ditentukan dan disepakati bersama. Lampirkan salinan teks asli atau *print out*-nya ketika melakukan analisis kritis.
 - b. Membuat refleksi dari setiap kegiatan perkuliahan, diketik pada kertas A4, ukuran margin kiri-kanan-atas-bawah masing-masing 3 cm, *font/huruf Times New Roman* ukuran 12 dengan jarak 1,5 spasi. Dicitak/di*print* bolak-balik dengan mode *fast print* (*print* cepat). Refleksi diri diberi identitas lengkap dan dikumpulkan pada minggu berikutnya. Isi refleksi diri terdiri dari:
 - 1) Makalah ke ... (sesuai pertemuan)
 - 2) Tanggal ... (sesuai pertemuan)
 - 3) Kegiatan:
 - a) Penjelasan ... (sesuai kegiatan di kelas)
 - b) Presentasi Kelompok ... (tuliskan nama anggota kelompok, judul

presentasi kelompok).

c) Membuat refleksi diri, pada bagian ini Anda diminta untuk menuliskan kembali tentang pemahaman atau ketidak pahaman ketika diskusi kelas setelah presentasi kelompok yang mendapat giliran. Anda juga diizinkan menulis kritikan melalui refleksi diri, kesukaan atau ketidak sukaan tetapi dengan kalimat yang santun tentang kegiatan perkuliahan yang sudah dilakukan setiap minggunya.

- c. Refleksi diri yang sudah dikoreksi dan dikembalikan segera diketik ulang, dan disimpan dalam CD atau *flash disk* atau *diback up* di drive D pada komputer atau laptop Anda. Ingat jangan sampai file refleksi diri Anda itu terkena virus.
- d. Refleksi diri tidak boleh sama atau mirip satu sama lain. Kumpulan refleksi diri, tugas analisis kritis, disusun berdasarkan urutan kegiatan selama perkuliahan.
- e. Menjelang akhir perkuliahan file dalam bentuk *MS Word* atau file pdf. Kirimkan ke alamat email dosen segera setelah pertemuan perkuliahan terakhir.
- f. Anda juga diminta untuk mengumpulkan *hardcopy* dari semua file tugas tersebut setelah dijilid rapi.
- g. *Hardcopy* tugas tersebut akan dinilai. Setelah dinilai, *hardcopy* tugas tersebut akan dikembalikan kepada Anda sebagai bukti Makalah belajar atau kita sebut sebagai portofolio selama mengikuti perkuliahan Analisis Sistem Teknik Kimia. Portofolio yang identik sebagian atau seluruhnya akan dikenakan hukuman pemberian nilai D.
- h. Format penilaian portofolio perkuliahan Analisis Sistem Teknik Kimia lihat di lampiran

BAB 1

DEFINISI SISTEM

DAN ANALISIS SISTEM

1.1. Pengertian Sistem

Sistem adalah sekumpulan unsur atau elemen yang saling berkaitan dan saling mempengaruhi dalam melakukan kegiatan bersama untuk mencapai suatu tujuan.

Contoh :

- Sistem komputer terdiri atas *Software*, *Hardware*, dan *Brainware*
- Sistem akuntansi

Menurut Ludwig Von Bertalanfy

Sistem merupakan seperangkat unsur yang saling terikat dalam suatu antar relasi diantara unsur-unsur tersebut dengan lingkungan.

Menurut Anatol Rapoport

Sistem adalah suatu kumpulan kesatuan dan perangkat hubungan satu sama lain.

Menurut L. Ackoff

Sistem adalah setiap kesatuan secara konseptual atau fisik yang terdiri atas bagian-bagian dalam keadaan saling bergantung satu sama lainnya.

Syarat-syarat sistem :

1. Sistem harus dibentuk untuk menyelesaikan masalah.
2. Elemen sistem harus mempunyai rencana yang ditetapkan.
3. Adanya hubungan diantara elemen sistem.
4. Unsur dasar dari proses (arus informasi, energi dan material) lebih penting daripada elemen sistem.
5. Tujuan organisasi lebih penting daripada tujuan elemen

Secara garis besar, sistem dapat dibagi menjadi 2, yaitu: sistem fisik dan sistem abstrak.

A. Sistem Fisik (*Physical System*) :

Kumpulan elemen-elemen/ unsur-unsur yang saling berinteraksi satu sama lain secara fisik serta dapat diidentifikasi secara nyata tujuan-tujuannya.

Contoh:

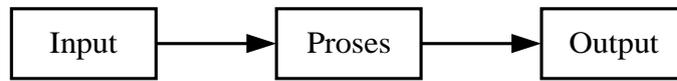
- Pada sistem transportasi elemennya adalah: petugas, mesin, organisasi yang menjalankan transportasi
- Pada sistem komputer, elemennya ialah: peralatan yang berfungsi bersama-sama untuk menjalankan pengolahan data.

B. Sistem Abstrak (*Abstract System*) :

Sistem yang dibentuk akibat terselenggaranya ketergantungan gagasan, dan tidak dapat diidentifikasi secara nyata, tetapi dapat diuraikan elemen-elemennya. Contoh: Sistem Teologi, hubungan antara manusia dengan Tuhan.

Model Umum Sistem Sederhana

Gambar model umum sistem sederhana adalah seperti pada Gambar 1.1



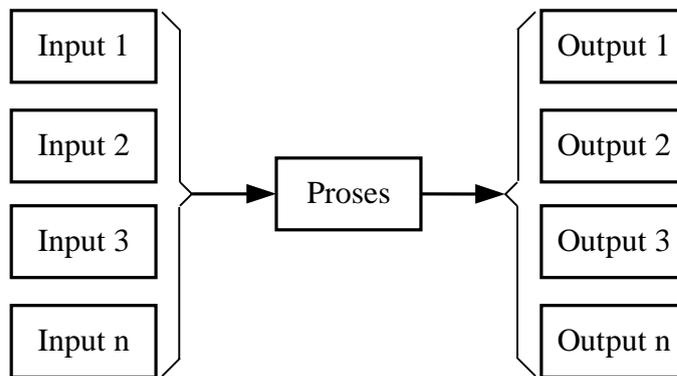
Gambar 1.1. Aliran sistem secara sederhana

Contoh :

- Program perhitungan basic kita masukkan, setelah dijalankan kita dapatkan hasilnya.
- Data mahasiswa (nama, nilai) diproses menjadi daftar nilai semester (berupa laporan).

Sistem dengan banyak input dan output

Gambar sistem banyak input dan output dapat digambarkan seperti pada Gambar 1.2



Gambar 1.2. Sistem banyak input dan output

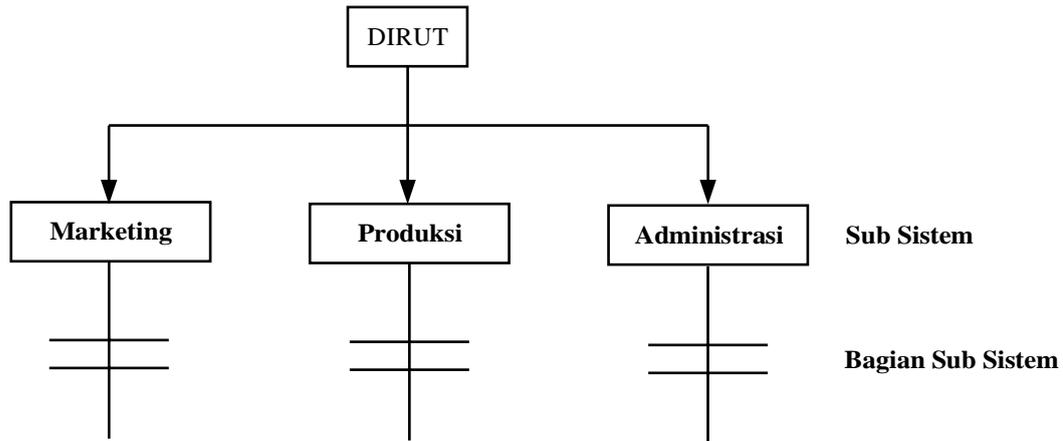
Contoh : Matriks ® masukannya banyak, keluarannyapun banyak

1.2. Karakteristik Sistem

- a. Organisasi
- b. Interaksi
- c. Interdependensi
- d. Integrasi
- e. Tujuan pokok

Organisasi

Contoh struktur dan fungsi organisasi seperti Gambar 1.3



Gambar 1.3. Contoh struktur dan fungsi organisasi

Fungsi

Organisasi tidak akan berjalan tanpa adanya fungsi dari setiap bagian maupun sub bagian

Contoh :

- Fungsi direktur utama.
Bertanggung jawab penuh terhadap mati atau hidupnya perusahaan yang dipimpinnya.
- Fungsi departemen marketing.
Bertanggung jawab penuh atas kelancaran pembuatan produk dengan jalan mencari langganan pembeli.
- Fungsi departemen keuangan dan administrasi.
Bertanggung jawab atas kelancaran pengeluaran keuangan perusahaan.

Interaksi

Saling keterhubungan antara bagian yang satu dengan lainnya.

Contoh : SA dengan P dengan DE dan sebaliknya.

SA : Sistem Analis
P : Programmer
DE : Dataentry

Interdependensi

Bagian yang satu mempunyai ketergantungan dengan bagian yang lainnya.

Contoh :

Bagian marketing saling bergantung dengan bagian produksi dan bagian keuangan dan administrasi dalam hal penagihan pada customer.

Integritas

Suatu keterpaduan antara subsistem-subsistem untuk mencapai tujuan.

Contoh :

Bagian marketing mendapat pesanan 100 buah mobil tapi hanya mampu menyediakan 50 unit. Untuk menangani masalah ini diadakan kerjasama dengan perusahaan lain yang bergerak dalam bidang yang sama.

Main objection (tujuan utama)

Pemusatan tujuan yang sama dari masing-masing subsistem.

Contoh : suatu perusahaan memerlukan pemusatan tujuan.

1.3. Klasifikasi Sistem

A. Determinan Sistem

Sistem dimana operasi-operasi (input/output) yang terjadi didalamnya dapat ditentukan/diketahui dengan pasti.

Contoh :

- Program komputer, melaksanakan secara tepat sesuai dengan rangkaian instruksinya.
- Sistem penggajian.

B. Probabilistik Sistem

Sistem yang input dan prosesnya dapat didefinisikan, tetapi output yang dihasilkan tidak dapat ditentukan dengan pasti. Selalu ada sedikit kesalahan/penyimpangan terhadap ramalan jalannya sistem.

Contoh :

- Sistem penilaian ujian
- Sistem pemasaran.

C. Sistem Terbuka

Sistem yang mengalami pertukaran energi, materi atau informasi dengan lingkungannya. Sistem ini cenderung memiliki sifat adaptasi, dapat menyesuaikan diri dengan lingkungannya sehingga dapat meneruskan eksistensinya.

Contoh :

Sistem keorganisasian memiliki kemampuan adaptasi. Bisnis dalam menghadapi persaingan dari pasar yang berubah. Perusahaan yang tidak dapat menyesuaikan diri akan tersingkir.

D. Sistem Tertutup

Sistem fisik di mana proses yang terjadi tidak mengalami pertukaran materi, energi atau informasi dengan lingkungan di luar sistem tersebut.

Contoh : reaksi kimia dalam tabung berisolasi dan tertutup.

E. Relatively Closed System

Sistem yang tertutup tetapi tidak tertutup sama sekali untuk menerima pengaruh-pengaruh lain.

Sistem ini dalam operasinya dapat menerima pengaruh dari luar yang sudah didefinisikan dalam batas-batas tertentu .

Contoh :

Sistem komputer. Sistem ini hanya menerima masukan yang telah ditentukan sebelumnya, mengolahnya dan memberikan keluaran yang juga telah ditentukan sebelumnya. Tidak terpengaruh oleh gejala di luar sistem.

F. Artificial Sistem

Sistem yang meniru kejadian dalam alam. Sistem ini dibentuk berdasarkan kejadian di alam di mana manusia tidak mampu melakukannya. Dengan kata lain tiruan yang ada di alam.

Contoh :

- Sistem AI, yaitu program komputer yang mampu membuat komputer seolah-olah berpikir.
- Sistem robotika.
- Jaringan neural network.

G. Natural Sistem

Sistem yang dibentuk dari kejadian dalam alam.

Contoh :

laut, pantai, atmosfer, tata surya, dan lain-lain.

H. Manned Sistem

Sistem penjelasan tingkah laku yang meliputi keikutsertaan manusia.

Sistem ini dapat digambarkan dalam cara-cara sebagai berikut :

- H.1. Sistem manusia-manusia.
Sistem yang menitik beratkan hubungan antar manusia.
- H.2. Sistem manusia-mesin.
Sistem yang mengikutsertakan mesin untuk suatu tujuan.
- H.3. Sistem mesin-mesin.
Sistem yang otomatis dimana manusia mempunyai tugas untuk memulai dan mengakhiri sistem, sementara itu manusia dilibatkan juga untuk memonitor sistem.

Mesin berinteraksi dengan mesin untuk melakukan beberapa aktifitas. Pengotomatisan ini menjadikan bertambah pentingnya konsep organisasi, dimana manusia dibebaskan dari tugas-tugas rutin atau tugas-tugas fisik yang berat.

Perancang sistem lebih banyak menggunakan metode "*Relatively Closed* dan Deterministik Sistem", karena sistem ini dalam pengerjaannya lebih mudah meramalkan hasil yang akan diperoleh dan lebih mudah diatur dan diawasi.

Contoh :

Pada bidang sistem informasi, faktor komputer dan program komputer biasanya "*Relatively Closed* dan Deterministik Sistem", tetapi faktor manusia sebagai pengelolanya adalah "*Open* dan Probabilistik Sistem".

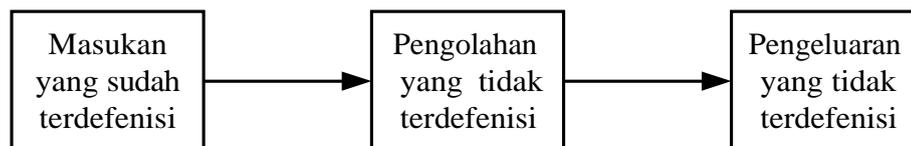
Metode Sistem

A. Blackbox Approach

Suatu sistem dimana input dan outputnya dapat didefinisikan tetapi prosesnya tidak diketahui atau tidak terdefinisi.

Metode ini hanya dapat dimengerti oleh pihak dalam (yang menangani) sedangkan pihak luar hanya mengetahui masukan dan hasilnya. Sistem ini terdapat pada subsistem tingkat terendah.

Contoh bagian pencetakan uang, proses pencernaan seperti Gambar 1.4



Gambar 1.4. Contoh bagian pencetakan uang dan proses pencernaan

B. Analytic System

Suatu metode yang mencoba untuk melihat hubungan seluruh masalah untuk menyelidiki kesistematikan tujuan dari sistem yang tidak efektif dan evaluasi pilihan dalam bentuk ketidak efektifan dan biaya.

Dalam metode ini beberapa langkah diberikan seperti di bawah ini :

- a. Menentukan identitas dari sistem.
 - sistem apa yang diterapkan

- batasannya
 - apa yang dilaksanakan sistem tersebut
- b. Menentukan tujuan dari sistem.
- output yang dihasilkan dari isi sistem
 - fungsi dan tujuan yang diminta untuk mencoba menanggulangi lingkungan
- c. Bagian-bagian apa saja yang terdapat dalam sistem dan apa tujuan dari masing-masing bagian tersebut.
- tujuan masing-masing bagian sistem harus jelas.
 - cara apa yang digunakan subsistem untuk berhubungan dengan subsistem lain
- d. Bagaimana bagian-bagian yang ada dalam sistem itu saling berhubungan menjadi satu kesatuan.

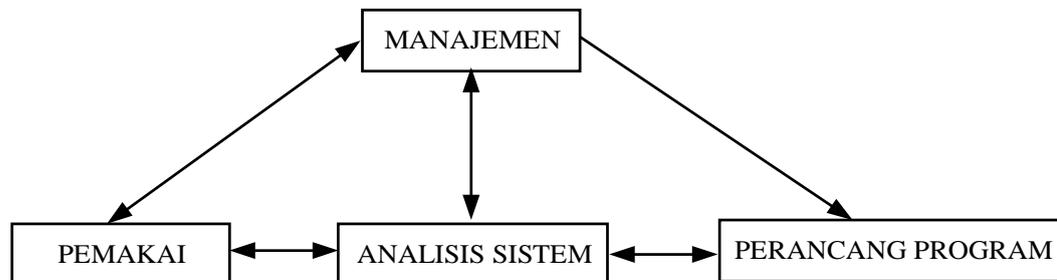
4. Pengertian Analisis Sistem

Suatu sistem akan dirancang oleh satu orang atau sekelompok orang yang membentuk tim. Orang yang merancang sistem ini disebut Sistem Analis.

Ada yang mendefinisikan Sistem Analis sebagai :

1. Seorang yang menggunakan pengetahuan aplikasi komputer yang dimilikinya untuk memecahkan masalah-masalah perancangan suatu pabrik, dibawah petunjuk Manajer Sistem.
2. Seorang yang bertanggung jawab menterjemahkan kebutuhan-kebutuhan si pemakai sistem (pemakai) ke dalam spesifikasi teknik yang diperlukan oleh Perancang Program dan diawasi oleh Manajemen.

Pengertian sistem analis ini dapat digambarkan sebagai pada Gambar 1.5 dibawah ini:



Gambar 1.5. Pengertian Sistem Analis

5. Fungsi Analisis Sistem

Fungsi Analisis Sistem adalah

1. Mengidentifikasi masalah-masalah dari pemakai
2. Menyatakan secara spesifik sasaran yang harus dicapai untuk memenuhi kebutuhan pemakai
3. Memeilih alternatif-alternatif metode pemecahan masalah
4. Merencanakan dan menerapkan rancangan sistemnya sesuai dengan permintaan pemakai

A. Evaluasi/Latihan

1. Tuliskan pemahaman anda tentang sistem.
2. Jelaskan perbedaan sistem dan analisis sistem.
3. Jelaskan hubungan keterkaitan sistem dan sub sistem.
4. Mengapa analisis sistem sangat penting di dalam melakukan suatu perhitungan massa dan energi dalam suatu sistem ?

B. Buku Sumber/Bacaan Pendukung

- Book, N.L. and Ramirez., W.F., 1976,"The Selection of Design Variables in System of Algebraic Equation"
- Coulson, J.Design of Chemical Process", McGraw-Hill Book Company, New York
- Lee, W. and Rudd, D.F., 1966, " On the Ordering of Recycle Calculation", 1966, AIChE Journal, Vol 12, No. 6, November 1966, pp. 1184-1190
- Lee, W. James H.Christense&Dale F.Rudd, "Design Variabel selection to simplify Process Calculations". AIChE Journal, vol 12 No.6 Nov 1966 pp-1104-1110
- Norman, R., L., May 1965, "A Matrix method for location of cycles of a Directed Graph. AIChE Journal, Vol. 11, No. 3, pp. 450-452

BAB 2

DERAJAT KEBEBASAN

DALAM SUATU SISTEM

2.1. Definisi dan Konsep Dasar Derajat Kebebasan

Persamaan untuk menghitung n bilangan numerik, pada umumnya untuk peristiwa-peristiwa fisis di bidang Teknik Kimia, dimana jumlah persamaan yang dapat dicari lebih sedikit daripada bilangan numerik yang ada. Untuk menghitung system persamaan tersebut, bilangan numerik yang berlebih perlu diberi harga. Hal ini nantinya akan member peluang untuk terjadinya Optimasi, yaitu dengan member harga yang tepat kepada bilangan numerik tersebut. Bilangan numerik yang berlebih dapat dapat diberi harga yang berbeda untuk setiap kali perhitungan (berubah-ubah). Bilangan-bilangan tersebut disebut Variabel. Variabel merupakan derajat kebebasan system tersebut.

Derajat kebebasan merupakan jumlah variabel yang bebas dipilih nilainya pada suatu system. Derajat kebebasan lebih dikenal dengan istilah Degrees of freedom yaitu jumlah variabel dikurangi jumlah persamaan.

Derajat kebebasan ada dua macam yaitu:

1. Derajat kebebasan yang ditentukan oleh lingkungan
2. Derajat kebebasan yang ditentukan sendiri oleh perancang

Derajat kebebasan yang ditentukan sendiri oleh perancang sering disebut juga dengan derajat kebebasan ekonomik atau variable perancangan.

Orang yang pertama kali mengkorelasikan degrees of freedom dengan jumlah variable adalah Gibbs, dengan hukum keseimbangan fase yang dicetuskannya dan masih relevan hingga sekarang.

Ada kalanya degrees of freedom sudah tertentu, seperti:

- a. Konsentrasi yang sudah diketahui dari alam, misal komposisi udara di atmosfer.
- b. Konsentrasi yang diinginkan pasar, misal diinginkan alkohol 70% sebagai cairan antiseptik.

FIXED VARIABLE, yaitu variable yang karena kondisi lingkungannya dan lain-lain. Nilainya sudah tidak bias bebas ditentukan lagi.

Fixed variable sama dengan degrees of freedom sudah tertentu, seperti yang telah ditulis diatas.

Contoh lain:

- a. Suhu air pendingin (untuk di Indonesia, suhu air pendingin berkisar 35°C sampai 45°C).
- b. Kecepatan alir bahan yang akan diolah.

Number fixed variable merupakan jumlah variable yang nilainya tidak bisa dipilih lagi.

NUMBER OF DESIGN VARIABLE, yaitu jumlah variable yang nilainya bebas dipilih,

umumnya bertujuan untuk optimasi.

Number of design variable dapat di dapat dicari menggunakan perhitungan berikut yaitu:

$$\text{Number of DV} = (\text{Degrees of freedom}) - (\text{number of FV})$$

OBJECTIVE FUNCTION, yaitu suatu fungsi yang nilainya ingin dimaksimumkan atau diminimumkan pada proses optimasi.

Optimasi adalah proses untuk mencari kondisi-kondisi yang paling menguntungkan (optimum).

Optimasi ada dua jenis:

- a. Maksimasi : Objective function sebesar-besarnya, misal keuntungan.
- b. Minimasi : Objective function sekecil-kecilnya, misal pengeluaran, pengorbanan.

Ada 3 aspek optimasi, yaitu :

- a. Optimasi matematis. Optimasi ini dilakukan pada proses (industri/kimia) yang tetap, kemudian dicari kondisi yang optimum. Misal proses tertentu pada suatu reaktor, dicari T, P, D optimum untuk produksi maksimum.
- b. Optimasi inovatif. Optimasi dilakukan dengan merubah proses supaya keuntungan sebesar-besarnya. Misal perubahan proses RAP menjadi RATB, perubahan dari suatu proses ke proses lain didasarkan atas inovatif kita, berdasarkan pengalaman. Jadi, optimasi ini merupakan suatu kreativitas.
- c. Optimasi gabungan, yaitu optimasi matematis dan inovatif dilakukan bersamaan. Misal suatu reaksi dapat dijalan pada fase gas dan cair. Optimasi matematis untuk mencari kondisi optimum reaksi dengan fase cair. Optimasi matematis untuk mencari kondisi optimum jika reaksi dengan fase gas. Selanjutnya, antara reaksi dengan fase cair dan fase gas dibandingkan kondisi optimumnya, lalu dipilih proses yang paling optimum dengan optimasi inovatif.

Langkah penting dalam optimasi adalah merumuskan hubungan matematis *objective function* dengan variabel-variabelnya.

F obj = f (x) ; satu variabel bebas.

F obj = f (X1, X2, X3,.....) ; banyak variabel bebas.

Dari *intuitiv*, dapat dirumuskan bahwa :

$$\text{Number of DV} = (\text{jumlah variabel}) - (\text{jumlah persamaan})$$

atau

$$\text{Number of DV} = (\text{jumlah variabel dengan FV yang sudah dikeluarkan}) - (\text{jumlah persamaan}).$$

1. Menentukan Jumlah Derajat Kebebasan

Persoalan pertama pada perancangan adalah mengidentifikasi variabel-variabel perancangan bebas tersebut.

Derajat kebebasan dapat ditentukan dengan cara:

1. Buat daftar variabel untuk setiap unit
2. Tentukan hubungan variable satu dengan yang lain

Dalam menentukan jumlah derajat kebebasan, langkah pertama yang dapat dilakukan adalah membuat daftar semua variable yang ada pada setiap unit yang digunakan, setelah daftar variabel selesai dibuat, maka dapat diketahui berapa jumlah variabel yang ada pada perhitungan, hal ini perlu karena untuk menentukan jumlah derajat kebebasan yang ada.

Hubungan variabel satu dengan variabel yang lain harus ditentukan dengan jelas. Informasi mengenai keadaan komponen-komponen proses dan hubungannya satu sama lain disebut “*System Design Relations*” atau persamaan-persamaan perancangan sistem

Persamaan-persamaan perancangan terdiri dari N sumber informasi tentang sistem, termasuk M variabel x_j (ukuran alat, kondisi operasi, kondisi arus terhubungkan, dan sebagainya)

Persamaan-persamaan perancangan harus tersusun dari sumber informasi bebas dan setiap persamaan yang dijabarkan dari persamaan lain harus dihilangkan.

2. Studi kasus derajat kebebasan

Di bawah ini ada beberapa contoh dari kasus yang paling sederhana sampai kasus yang agak sulit.

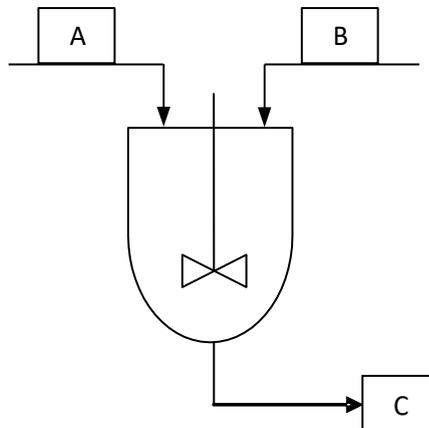
Kasus I, Kontruksi $N > M$

Jumlah persamaan-persamaan bebas lebih banyak daripada variabel. Permasalahan tidak diformasikan dengan benar sehingga pada umumnya tidak mungkin memperoleh harga semua variabel yang melebihi persamaan-persamaan perancangan tersebut.

Persamaan matematik, keadaan fisis, permasalahan atau kedua-duanya perlu ditinjau kembali. Sebaiknya permasalahan fisis ditinjau terlebih dahulu untuk mendapatkan jumlah variabel yang benar

Contoh:

Diinginkan mencampur 2 arus dalam suatu peralatan untuk membentuk arus ketiga seperti terlihat pada Gambar 2.1. seperti berikut



Gambar 2.1. Pencampuran 2 arus dalam suatu peralatan.

Neraca massa pada peralatan pencampur yaitu:

1. $A + B \rightarrow C$
2. $K = B/A$ (K = kualitas campuran)

3. $A = 1000 \text{ lb/j}$
4. $C = 2000 \text{ lb/j}$
5. $K = 4,0$

Jumlah, persamaan perancangan $N = 5$, jumlah variabel $M = 4$ (A,B,C,K) \rightarrow titik mungkin mendapatkan harga B yang memenuhi kondisi problema karena masalah ini tidak terformulasikan dengan baik.

Kasus I. Tidak ada Derajat Kebebasan $N = M$

Dalam hal ini harga variabel sudah tertentu oleh persamaan-persamaan yang ada dari kasus I, jika persamaan 4 tidak ada, maka jumlah persamaan $N = 4$

1. $A + B = C$
2. $K = B/A$
3. $A = 1000$
4. $K = 4,0$

Harga $N = M$ (M terdiri dari A,B,C,K) keempat persamaan tersebut bebas dari masing-masing, sehingga harga semua variabel sudah pasti tidak ada kebebasan bagi variabel-variabel tersebut mempunyai harga yang lain.

Kasus II. Ada Derajat Kebebasan $N < M$

Jika suatu problems perancangan terformulasikan dengan baik mengandung M variabel yang lebih banyak dari jumlah persamaan perancangan N , maka ada variabel-variabel yang harganya perlu ditentukan.

Mungkin variabel-variabel tersebut mempunyai beberapa harga tetapi untuk tiap set hanya ada satu harga untuk satu variabel sehingga memberikan kondisi operasi alternative.

Adanya kondisi operasi alternatif merupakan gambaran utama untuk suatu problema optimasi. Misalnya jika persamaan 4 dalam kasus II dihilangkan, maka $N = 3$ dan M tetap ($=4$). Ada beberapa harga B,K,D,C yang memenuhi persamaan-persamaan perancangan sehingga ada "kebebasan" kebebasan ini dapat dipakai untuk mencapai "tujuan optimasi". Secara umum, jumlah derajat kebebasan = $(M-N)$ atau $F = M - N$. Derajat kebebasan F ini dapat (sebagai atau semua tergantung problema fisisnya) dipilih sebagai variabel perancangan (D) yang harganya dapat dipilih secara bebas tetapi tidak boleh bertentangan dengan hukum alam dan system itu sendiri misalnya kalau suhu air cair perlu ditetapkan dan diambil harga $1.000.000^{\circ}\text{C}$ \rightarrow tidak mungkin) variabel-variabel lainnya disebut *state variable* dan dilambangkan dengan S jika harga variabel-variabel perancangan sudah ditentukan, maka harga *state variable* dapat dihitung di persamaan yang ada. Persamaan perancangan dapat ditulis :

$$F_i (d_j, S_k) = 0 \quad (2-1)$$

dengan

$i = 1, 2 \dots N = \text{jumlah persamaan perancangan}$

$j = 1, 2 \dots F = \text{derajat kebebasan}$

$k = 1, 2 \dots N =$ jumlah dependent *state variable*

derajat kebebasan F dapat dituliskan

$$F = M - N$$

dengan

F = derajat kebebasan

M = Jumlah variable

N = Jumlah persamaan perancangan

Dalam praktek derajat kebebasan dihabiskan melalui dua cara :

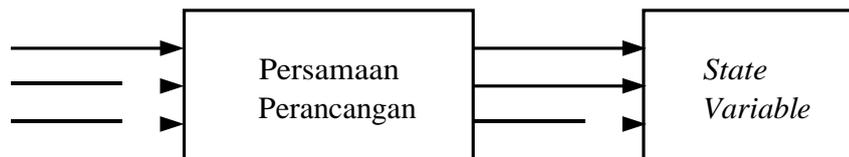
1. Variabel-variabel titik mempunyai harga +++. Misalnya suhu air pendingin ditetapkan sesuai dengan suhu air pendingin yang tersedia.
2. Derajat kebebasan lainnya (sisanya) adalah variabel-variabel yang akan diatur sedemikian rupa sehingga dapat memaksimumkan keuntungan sistem misalnya perancang hanya dapat bebas memiliki volume reaktor dan suhu operasi yang paling menguntungkan untuk operasi sebuah reaktor kedua parameter ini disebut "*economic degress of freedom*" atau desing variabel-variabel perancangan)

Materi $F = M - N$.

F → sebagian atau seluruhnya diambil sebagai variable perancangan (d)

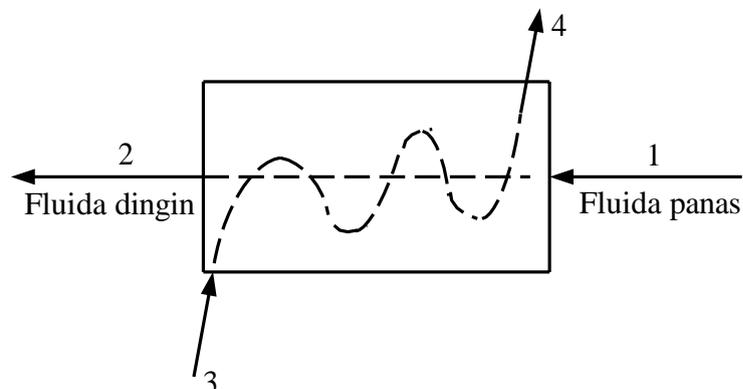
Sisanya = $M - F = N$ → diambil sebagai *state variable* (s)

Gambar 2.2 adalah gambaran hubungan antara persamaan perancangan dengan *state variable*.



Gambar 2.2. Hubungan antara persamaan perancangan dengan *state variable*.

Derajat kebebasan pada sebuah alat penukar kalor (*Heat Exchanger/HE*) skema sebuah HE dapat ditunjukkan seperti Gambar 2.3.



Gambar 2.3. Derajat kebebasan pada sebuah alat penukar kalor.

Jumlah variabel-variabel utama ada 13 buah yaitu :

1. K, macam *Heat Exchanger* (*finned tube, double pipe, counter current, cocurrent, etc*)
2. Q panas yang di-*transfer*
3. A luas *transfer* panas
4. U *overall heat, tr, colf*
5. W_1 } Kecepatan aliran massa fluida { 7. W_3
6. W_2 } { 8. W_3
9. t_1
10. t_2 temperatur
11. t_3
12. t_4

Persamaan-persamaan yang ada berjumlah 7 buah :

1. $Q = UA (\Delta t) \text{lm}$
2. $(\Delta t) \text{lm} = \frac{(t_1 - t_4) - (t_2 - t_3)}{\ln \frac{(t_1 - t_4)}{(t_2 - t_3)}}$
3. $W_1 = W_2$ Kekekalan massa
4. $W_3 = W_4$
5. $Q = W_3 C_p (t_1 - t_2)$ Energi yang dipindahkan diantara 2 arus
6. $Q = W_3 C_p (t_4 - t_3)$

U merupakan fungsi dari *flow rates* Co sifat fluida yang merupakan fungsi suhu dan jenis *Heat Exchanger*, jadi :

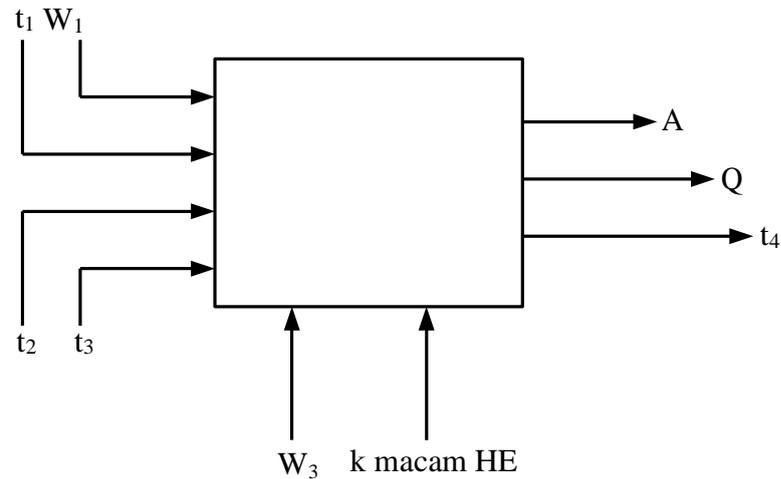
$$7. U = U (W_1, \dots, W_4, t_1, \dots, t_4, k)$$

$$\begin{aligned} \text{Total derajat kebebasan } F &= M - N \\ &= 13 - 7 = 6 \end{aligned}$$

Misal HE tersebut diatas melakukan tugas khusus untuk sebuah system yang lebih besar dengan membandingkan fluida dingin $W_1 = 1000 \text{ lb/J}$ dari $t_1 = 200^\circ\text{F}$ menjadi $t_2 = 100^\circ\text{F}$. menggunakan air pendingin yang tersedia dengan suhu $t_3 = 60^\circ\text{C}$. Dengan demikian 4 dari enam derajat kebebasan yang ada sudah tertentu. Dua variabel bebas yang tersisa, yaitu jenis HE dan laju aliran massa pendingin w_3 dapat diatur oleh perancang dengan menentukan harga-harga dan sisa derajat kebebasan dan menyelesaikan persamaan perancangan, maka dapat dihitung variabel-variabel yang lain, diantaranya adalah luas transfer panas dari HE. Arah perhitungan untuk kasus ini dapat dituliskan dengan diagram aliran informasi sebagai berikut :

1. Variabel-variabel ditetapkan oleh lingkungan.
2. Variabel-variabel yang bebas ditentukan oleh perancang

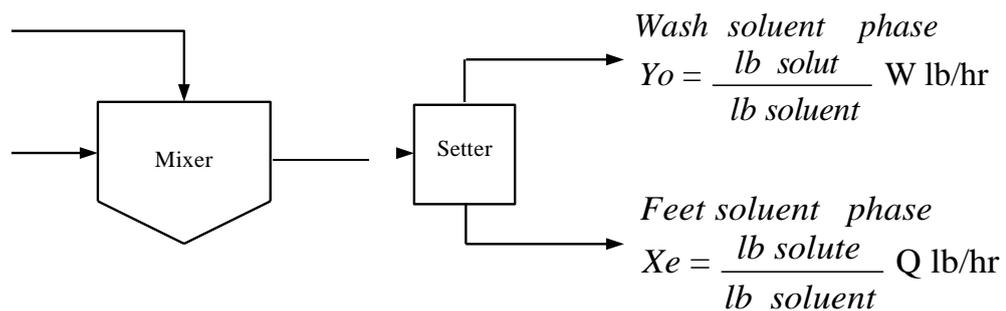
Gambar 2.4 menggambarkan informasi aliran yang bekerja pada alat HE.



Gambar 2.4. Variabel-variabel yang mempengaruhi kerja alat HE.

Pembalikan aliran Informasi

Pure wash solvent A or B, Gambar 2.5 adalah gambar aliran *solvent* pada beberapa alat



Gambar 2.5. Contoh aliran *solvent*.

Catatan : A atau B adalah macam *solvent*

Persamaan perancangan untuk unit diatas adalah :

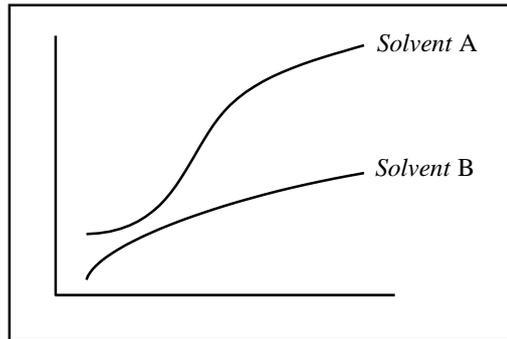
Neraca massa untuk zat terlarut

$$Q \cdot x_f = Q \cdot x_o + W \cdot Y_o \quad (2-2)$$

Hubungan keseimbangan diantara *phase effluent*

$$Q(X_0, Y_0) = 0$$

Persamaan (2-2) digambarkan dengan grafik berikut untuk dua macam *solvent* seperti Gambar 2.6. Gambar 2.6 adalah gambaran dua macam *solvent*.



Gambar 2.6. Grafik aliran 2 macam *solvent*.

Catatan :

$$M = Q, X_f, W, S, X_0, F_0$$

$$N = 2$$

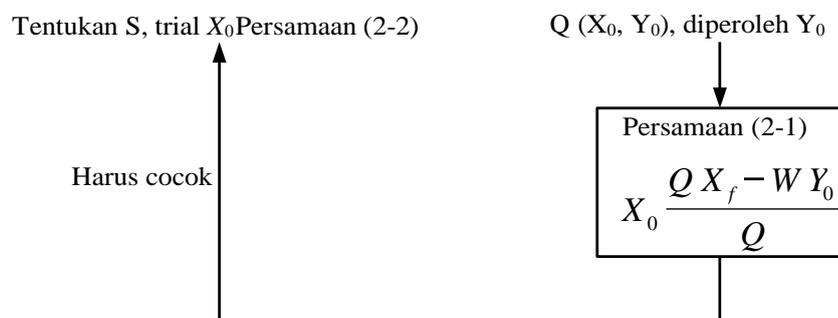
$$F_1 = 6 - 2 = 4 \text{ (Q G Xf)}$$

$$\rightarrow d = 4 - 2 = 2$$

Q dan Xf \rightarrow kondisi umpan yang ditetapkan dalam persoalan.

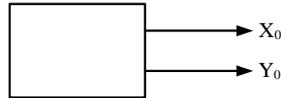
1. Jika jenis *solvent* (S=A atau B) dan W ditentukan maka semua variabel lainnya dapat dihitung, yaitu dengan menyelesaikan NM dan persamaan kesetimbangan secara simultan.

Gambar 2.6 adalah contoh pengujian penyelesaian suatu persamaan.



Gambar 2.6. Pengujian suatu persamaan

Aliran arus informasinya :

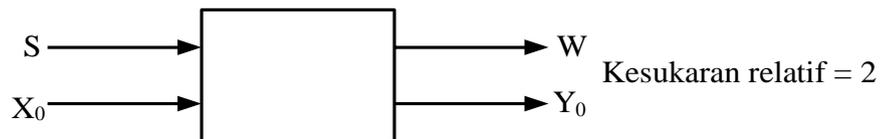


Kesukaran relatif = 8

2. Jika jenis *soluent* ditentukan ($S = A$ atau B) dan sebagai pengganti W maka ditentukan X_0 , perhitungan variabel lainnya menjadi lebih mudah.

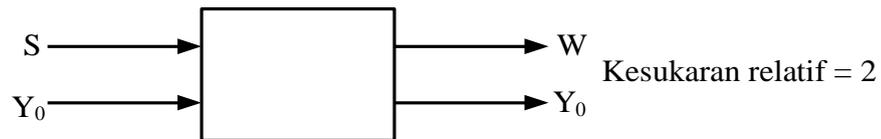
$$X_0 \rightarrow \text{Persamaan (2-2) atau dari grafik } Y_0 \rightarrow \text{Persamaan (2-1) } W = \frac{Q.X_f - Q.X_0}{Y_0}$$

Aliran informasi Gambar 2.7 adalah gambaran informasi aliran penentu Persamaan (2-2).



Gambar 2.7. Aliran informasi penentuan Persamaan (2-2).

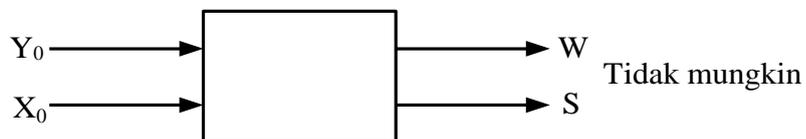
3. Jenis *soluent* ($S = A$ atau B) dan Y_0 ditentukan seperti Gambar 2.8.



Gambar 2.8. Aliran informasi penentuan nilai Y_0 .

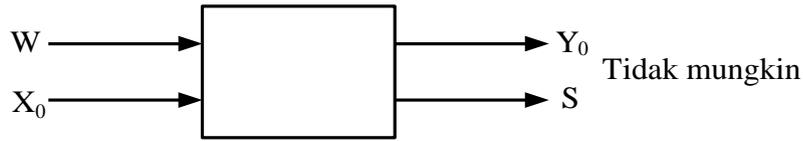
Untuk point 2 dan 3 terjadi pembalikan aliran informasi \rightarrow memudahkan/ menyederhanakan perhitungan.

4. X_0 dan Y_0 ditentukan \rightarrow tidak mungkin karena $\theta (X_0, Y_0)$ seperti Gambar 2.9.



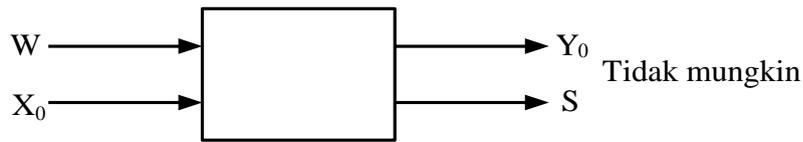
Gambar 2.9. Aliran penentuan nilai X_0 dan Y_0 .

5. W dan X_0 ditentukan, hitung jenis *soluent* yang dipakai \rightarrow tidak mungkin karena $S = A$ atau B saja. Tanpa tahu $S = A$ atau $B \rightarrow Y_0$ tidak dapat ditentukan seperti Gambar 2.10.



Gambar 2.10. Aliran penentuan nilai W dan X₀.

6. W₀ dan Y₀ ditentukan. Hitung jenis *solvent* yang dipakai → tidak mungkin karena S = A atau B saja dan $\theta(X_0, Y_0) = 0$ seperti Gambar 2.11.



Gambar 2.11. Aliran Penentuan W₀ dan Y₀.

Logaritma x pemilihan variabel perancangan

Jika jumlah variabel dan persamaan tidak terlalu banyak → pemilihan harga variabel-variabel perancangan dan penentuan susunan aliran informasi dapat secara langsung dengan pemeriksaan. Bila jumlah variabel-variabel persamaan banyak → pakai metode membuat tabel yang disebut “*structural array*”. Tabel ini menerangkan struktur persamaan perancangan yang akan dioperasikan.

Kolom-kolom array → menunjukkan semua variabel yang ada.

Baris-baris array → menunjukkan semua persamaan perancangan bilamana suatu variabel muncul dalam persamaan perancangan.

Struktur array untuk HE yang dibicarakan seperti Tabel 2.1.

Tabel 2.1. Struktur array (Struktur persamaan perancangan)

	X	Q	A	U	W ₁	W ₂	W ₃	W ₄	t ₁	t ₂	t ₃	t ₄	(Δt)
1		X	X	X									X
2									X	X	X	X	X
3					X	X							
4							X	X					
5		X			X				X	X			
6		X					X				X	X	
7	X			X	X	X	X	X	X	X	X		

□ = dipilih sebagai variabel perancangan

○ = ditetapkan oleh lingkungan

Empat variabel yang telah ditetapkan, yaitu :

$$W_1 = 1000 \text{ lb/jam}$$

$$t_1 = 200^\circ\text{F}$$

$$t_2 = 100^\circ\text{F}$$

$$t_3 = 60^\circ\text{C}$$

dan variabel k (macam HE) dipilih sebagai variabel perancangan yang bebas ditentukan oleh perancang selanjutnya adalah memilih secara sistematis variabel perancangan yang dapat dihitung dari persamaan-persamaan sehingga akhirnya tinggal tersisa sebuah derajat kebebasan.

Alogaritma adalah sebagai berikut :

- 1) Tentukan kolom yang hanya memuat 1x serta coretlah kolom dan baris yang mengandung x tersebut. Perubah yang tercoret adalah perubah yang terhitung dari persamaan itu.
- 2) Ulangi langkah 1 sampai semua persamaan habis

Variabel-variabel yang tidak tercoret adalah variabel-variabel perancangan sistem yang dipelajari. Dengan cara ini dihasilkan urutan-urutan persamaan yang harus diselesaikan dimana urutan-urutan pencoretan persamaan jika tidak semua loop yang tidak dicoret dengan pemilihan variabel perancangan yang tepat sehingga persamaan-persamaan ttt diselesaikan dengan simultan.

Contoh penaikan algoritma di atas untuk HE yang telah dibicarakan.

PENCORETAN :

	Q	A	U	W ₂	W ₃	W ₄	t ₄	Δ lm
1	X	X	X				X	X
2								

3				X				
4					X	X		
5								
6					X		X	
7				X	X	X	X	

	Q	U	W ₂	W ₃	W ₄	t ₄	Δ lm
1	X					X	X
2							
3			X				
4				X	X		
5							
6				X		X	
7		X	X	X	X	X	

	Q	U	W ₂	W ₃	W ₄	t ₄	Δ lm
3			X				
4				X	X		
5	X						
6	X			X		X	

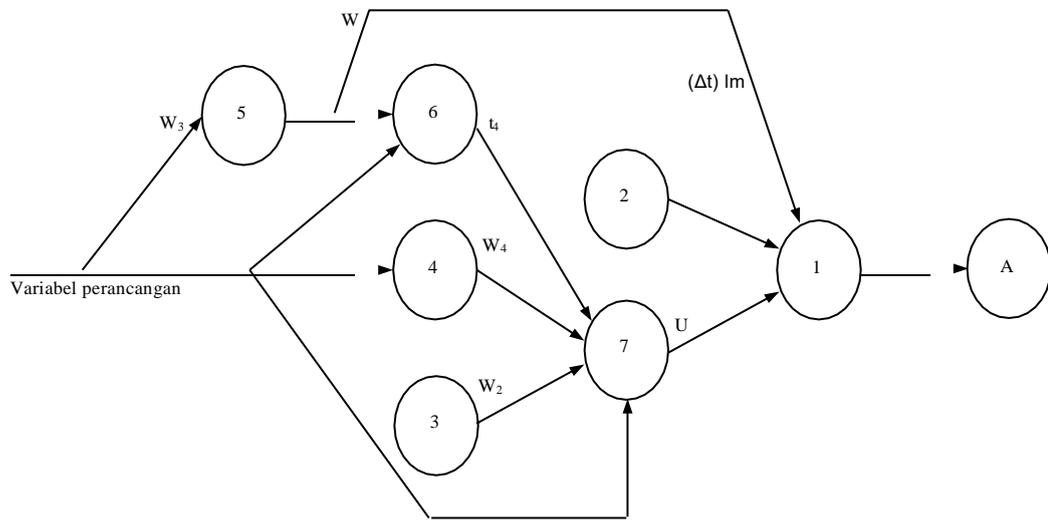
	Q	
s	X	

W₃ tidak tercoret maka W₃ merupakan variabel perancangan (ditentukan sendiri).

Pencoretan ke 7 → hitung Q dari persamaan (5)

- 6 → hitung t_4 dari persamaan (6)
- 5 → hitung W_4 dari persamaan (4)
- 4 → hitung W_2 dari persamaan (3)
- 3 → hitung $(\Delta t)_{lm}$ dari persamaan (2)
- 2 → hitung U dari persamaan (7)
- 1 → hitung A dari persamaan (1)

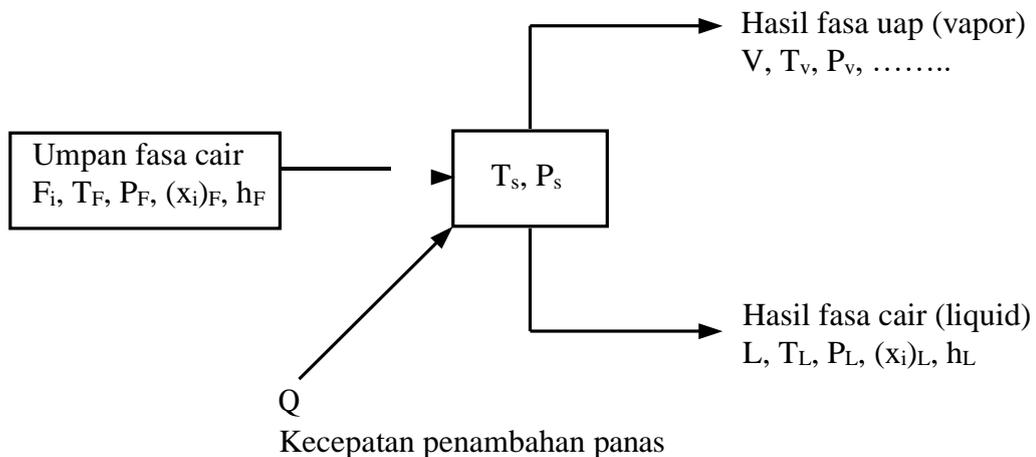
Urutan-urutan perhitungan adalah seperti Gambar 2.12 dibawah ini.



Gambar 2.12. Variabel perancangan perhitungan transfer panas pada alat HE.

Ternyata transfer panas pada HE bukan variabel perancangan yang baik, karena pemilihan A sebagai variabel perancangan akan memaksa perancang menghadapi perhitungan yang sulit karena persamaan – persamaan perancangan harus diselesaikan secara simultan.

Untuk memberi gambaran tentang perhitungan derajat kebebasan, perhatikan sketsa equilibrium separator seperti Gambar 2.13.



Gambar 2.13. Perhitungan derajat kebebasan pada alat separator.

Catatan : $T_S = T_V = T_L$

$P_S = P_V = P_L$

F = laju aliran massa umpan

V = laju aliran massa hasil (vapor)

L = laju aliran massa hasil (liquid)

T = suhu

P = tekanan

h = entalpi fasa cair

H = entalpi fasa uap

= konsentrasi komponen I (dalam fasa cair)

= konsentrasi komponen I (dalam fasa uap)

(jumlah komponen = 1,2, ... c)

= kecepatan penambahan panas

Untuk menentukan jumlah derajat kebebasan system (alat) tersebut, pertama-tama kita buat daftar variabel-variabelnya.

	Jumlah variabel
Kapan laju aliran massa tiap komponen	
Suhu, tekanan, entalpi	CT ₃
(F ₁ , F ₂ , ... F _c , T _F , P _F , h _F)	
Hitung suhu dan tekanan (T _S dan P _S)	2
Kecepatan penambahan panas	1
Vapor laju aliran massa tiap komponen entalpi	
(V ₁ , V ₂ , ... V _C , H _V)	C + 1
T _V dan P, tidak termasuk variabel	
Karena T _S = T _V , P _S = P _V	
Liquid laju aliran massa tiap komponen entalpi	
(L ₁ , L ₂ , ... L _C , h _L)	C + 1
T _L dan P _L tidak termasuk variabel	
Karena T _S = T _L ; P _S = P _L	
	Total = 3C + 8

Selanjutnya dibuat daftar persamaan – persamaan yang menghubungkan variabel – variabel yang ada.

	Jumlah persamaan
<ul style="list-style-type: none"> • Bila suhu, tekanan dan komposisi Masing-masing arus sudah tertentu maka dapat dihitung entalpinya dengan cara termodinamika persamaan untuk ketiga arus adalah ekuivalen 	3
<ul style="list-style-type: none"> • Apabila suhu dan tekanan sama, maka komposisi uap dan cairan dapat dihitung ada hubungan kesetimbangan antara fase uap dan fase cair untuk masing-masing komponen 	C
<ul style="list-style-type: none"> • Neraca massa untuk tiap-tiap komponen 	C
<ul style="list-style-type: none"> • Neraca energi 	1
	Total = 2C + 4

Catatan entalpi = $f(T, P, X_i)$

$$\begin{aligned} \text{Total derajat kebebasan } F &= (3C+8) - (2C+4) \\ &= C + 4 \end{aligned}$$

Contoh :

Jika laju aliran massa untuk tiap-tiap komponen pada umpan ditentukan suhu dan tekanan umpan diketahui, maka total variable yang bebas untuk dirubah-ubah adalah $(C+4) - (C+2) = 2$ jadi perancang dapat mengatur tekanan dalam still (P_s) dan kecepatan penambahan panas (q) untuk mencapai pemisahan komponen itu yang optimal menurut perhitungan ekonomi.

TUGAS

Sebuah equilibrium *flash distillation* digunakan untuk memisahkan campuran biner butane-heptane dengan laju aliran umpan 3,2 mol/detik. Alat tersebut dioperasikan pada 700 KPa

- a) tuliskan semua variable yang ada
- b) tuliskan semua persamaan perancangannya
- c) tentukan algoritma perhitungan variabel-variabelnya dengan cara membuat *structure array*

(Recycle yang tidak dapat dihilangkan)

Pada kebanyakan proses-proses dalam teknik kimia tidak dimungkinkan untuk menghilangkan semua recycle hanya dengan pemilihan variable-variabel perancangan bebas secara hati-hati. Adanya *loop recycle* disebabkan apakah variabel-variabel perancangannya tidak cukup,

penambahan arus informasi sulit dilakukan atau hubungan-hubungan yang diinginkan diantara komponen-komponen terlalu banyak. Dalam hal ini semua variabel-variabel diselesaikan/dihitung secara simultan. Adanya *recycle* dapat ditemukan dengan jalan seperti algoritma berikut :

Langkah 1 :

Gunakanlah alogaritma pemiliohan variabel perancangan yang telah dibicarakan didepan (contoh untuk HE) jika tidak semua persamaan dapat dicoret, lanjutkan ke **Langkah 2**.

Langkah 2 :

Deefinisikan $k = \min f(x_1) - 1$ dengan $f(x_1) =$ jumlah persamaan-persamaan yang mengandung variable x_1 .

Langkah 3 :

Tandai himpunan k persamaan-persamaan yang mempunyai sifat bahwa jika himpunan ini dicoret, masih ada suatu array yang masih mengandung sekurang-kurangnya satu variabel yang muncul hanya dalam satu persamaan.

Langkah 4 :

Coret persamaan-persamaan yang didapat pada **Langkah 3**.

Langkah 5 :

Kerjakan pencoretan seperti **Langkah 1**, pada array yang tersisa

Langkah 6 :

Jika persamaan-persamaan tidak habis tercoret, coba himpunan k persamaan-persamaan yang lain, kembali kelangkah 2, 3, 4 dan 5

Langkah 7 :

Bila semua himpunan sudah dicoba dan persamaan-persamaan tidak habis tercoret, kembali kelangkah 3 dengan k baru $\rightarrow k = k$ (lama) +1

Contoh :

Variabel = $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6$

Persamaan :

1. $x_1 + x_2 = 0$
2. $x_1 + ax_3 + bx_4 = 0$
3. $x_2 + (x_3 + dx_4 + ex_5 + fx_6) = 0$
4. $x_4 + x_5 + x_6 = 0$

Structural array

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
1	X	X				
2	X		X	X		

3		X	X	X	X	X
4				X	X	X

$$\text{Min } p(x_i) = 2$$

$$K = \min p(x_i) - 1$$

$$= 2 - 1$$

$$= 1$$

K = 1 sehingga sebuah persamaan harus dicoret dipilih persamaan 1 untuk dicoret, sehingga menghasilkan substructure yang kemudian dikenakan algoritma pemilihan variabel perancangan seperti pada **Langkah 1**.

X₁ X₂ X₃ X₄ X₅ X₆

2	X		X	X		
3		X	X	X	X	X
4				X	X	X

Gunakan **Langkah 1**

X₁ X₂ X₃ X₄ X₅ X₆

2	X		X	X		
3		X	X	X	X	X
4				X	X	X

X₃ X₄ X₅ X₆

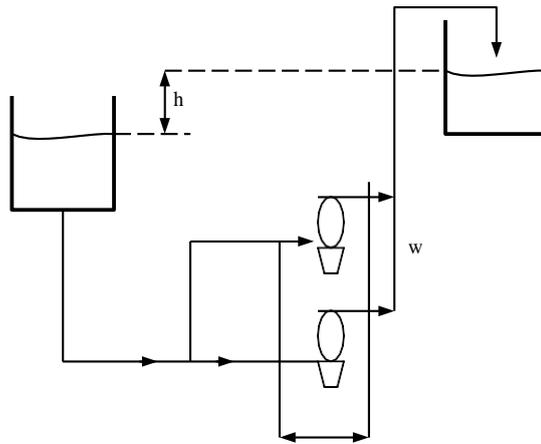
4		X	X	X
---	--	---	---	---

X₃, X₅, X₆ → 3 buah variabel tersisa.

Karena k = 1 → maka ada salah satu dari variabel ini merupakan *recycle* variabel dan 2 lainnya merupakan variabel perancang.

Latihan :

Perhatikan Gambar 2.14. dibawah ini.



Gambar 2.14. Aliran untuk proses siklus

$$\Delta P = 25w + p_{gh}$$

$$\Delta P_1 = 0,2w_1 + 0,4 w_2$$

$$\Delta P_2 = 0,7w_1 + 0,5 w_2$$

$$\Delta P = \Delta P_1 = \Delta P_2$$

$$W = w_1 + w_2$$

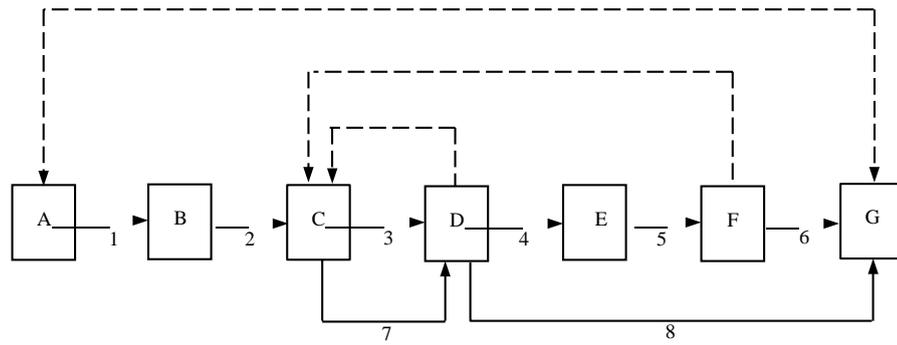
Pendekatan umum x_G diberi angka ttt lalu dilakukan perhitungan unit yang kemudian melalui proses siklis (seperti terlihat pada gambar) sampai didapat x_6 ini dibandingkan dengan harga yang ditentukan sebelumnya. Jika $|(x_{6r} - x_{6a})|$ cukup besar maka perhitungan belum konvergen perhitungan diulang lagi dengan x_6 baru sampai diperoleh $|(x_{6r} - x_{6a})|$ cukup kecil, misalnya 10^{-6} , bila demikian maka berarti perhitungan sudah konvergen dan perhitungan dihentikan

Langkah pertama pada masalah recycle yang kompleks adalah penentu kondisi yang paling sederhana dari arus-arus recycle penentuan the simplest recycle set pada suatu system yang kompleks sering sulit dilakukan dengan inpeksi the simplest recycle set didefinisikan sebagai himpunan yang mempunyai jumlah arus recycle yang minimum.

Lil dan rud (1966) mengembangkan prosedur untuk menentukan jumlah minimum recycle parameters pada suatu proses yang kompleks misalnya system seperti terlihat pada gambar berikut, dapat memberikan beberapa jenis diagram aliran dengan arus-arus recycle yang berbeda.

Kasus I (S_0, S_{10}, S_{11}).

Perhatikan Gambar 2.15 dibawah untuk kasus 1 seperti berikut:

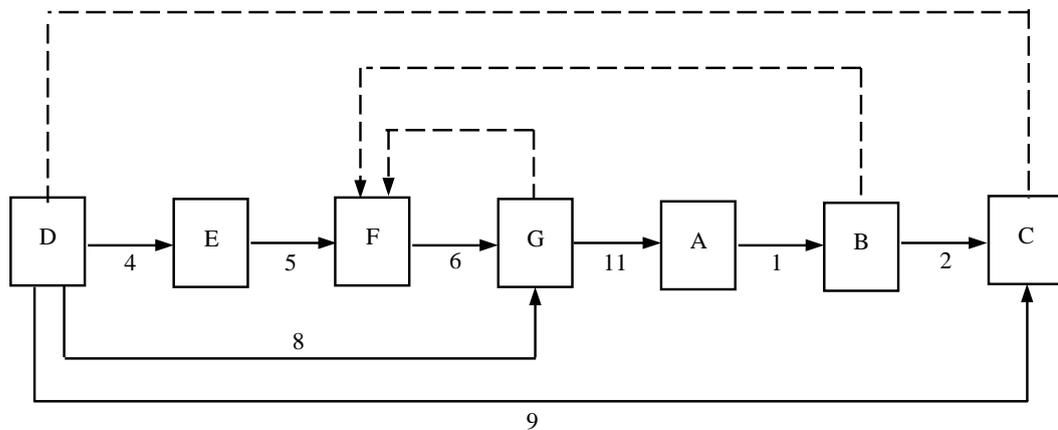


Gambar 2.15. Diagram aliran Kasus I (S_0, S_{10}, S_{11})

Struktur sistem mula-mula (asli) dapat dibuat struktur yang lain dengan pemisahan *recycle* parameter, misalnya sebagai berikut :

Kasus II (S_3, S_4).

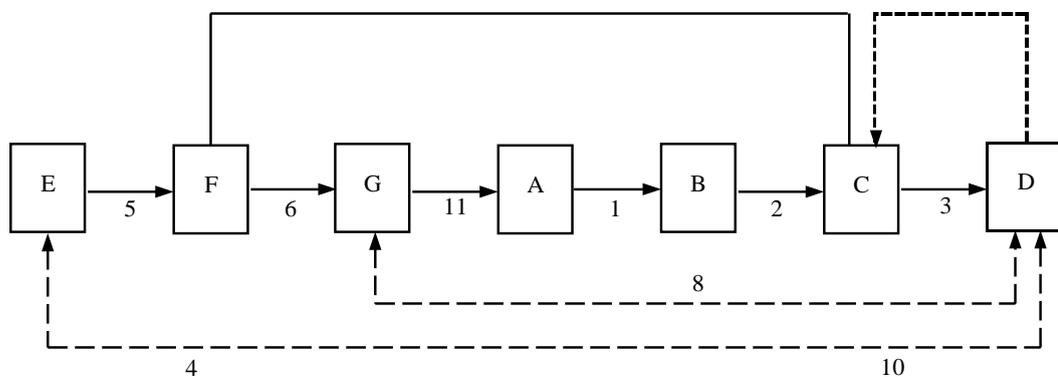
Contoh kasus II untuk gambaran diagram alir dengan arus *recycle* seperti pada Gambar 2.16



Gambar 2.16. Diagram alir Kasus II (S_3, S_4)

Kasus III.

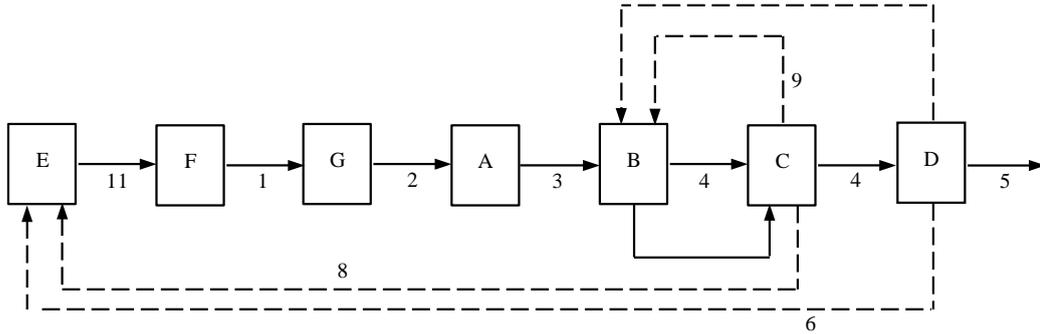
Kasus III seperti pada Gambar 2.17 menggambarkan aliran dengan 4 *recycle*



Gambar 2.17. Gambaran aliran untuk 4 recycle.

Kasus N (S_6, S_8, S_9, S_{10}).

Kasus N seperti pada Gambar 2.18 adalah gambaran kasus untuk perhitungan aliran dengan 5 recycle



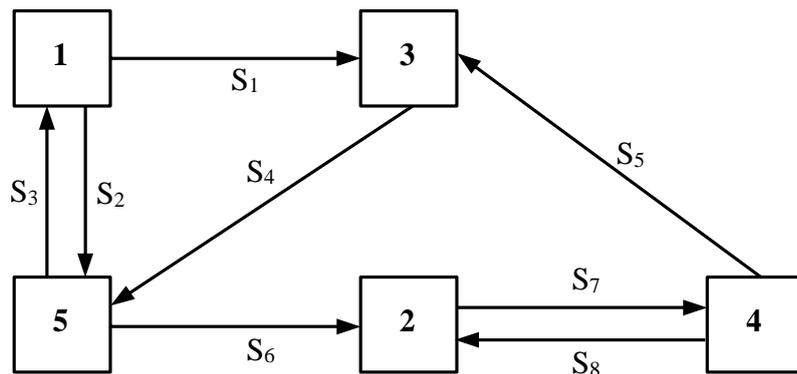
Gambar 2.18. Gambaran aliran dengan 5 aliran recycle.

Dari struktur diatas ternyata Kasus 2 mengandung 2 buah recycle parameter (paling kecil dibanding kasus yang lain). Sehingga perhitungannya paling sederhana pada perhitungan “recycle harga” arus baliknya diberi nilai dengan *assumed value* sehingga bias mempercepat perhitungan iteratif bila jumlah arus baliknya sedikit.

Seringkali terlalu sulit untuk menentukan himpunan arus-arus recycle yang paling sederhana hanya dengan pemeriksaan, tetapi sekarang ada suatu algoritma sederhana yang telah dikembangkan untuk membantu para insinyur.

Algoritma ini dimulai dengan mencari semua recycle didalam sistem dan membuat sebuah tabel recycle baris-baris dalam tabel recycle menunjukkan cycle dan kolom-kolomnya menunjukkan arus-arus yang ada. Setiap arus yang tampak pada sebuah cycle ditandai dengan angka.

Perhatikan aliran suatu sistem pada Gambar 2.19 berikut :



Gambar 2.19. Aliran dengan dengan banyak recycle.

Cycle-nya adalah : $A = S_2, S_3$

$$B = S_7, S_8$$

$$C = S_1, S_2, S_4$$

$$D = S_4, S_6, S_7, S_5$$

Augmented cycle tabel dari sistem tersebut adalah seperti pada Tabel 2.2 beriku :

Tabel 2.2. Augmented cycle tabel suatu sistem (Augment : memperbesar, memperbanyak, menambah).

	S ₁	S ₂	S ₃	S ₄	S ₅	S ₆	S ₇	S ₈	
A		1	1						2
B							1	1	2
C	1	1		1					3
D				1	1	1	1		4
	1	2	1	2	1	1	2	1	

the degree of a cycle adalah jumlah arus yang terlibat di dalam suatu cycle dan sama dengan jumlah elemen didalam suatu baris pada cycle tabel.

Stream frequency : jumlah cycle dimana suatu arus muncul dan sama dengan jumlah elemen didalam kolom. Nampak bahwa beberapa arus muncul pada lebih dari satu cycle pemilihan arus-arus yang demikian sebagai arus recycle menghilangkan beberapa cycle.

Apabila terdapat sebuah cycle berderajat satu, maka arus tunggal yang muncul pada cycle itu harus dipilih sebagai arus recycle ; ini adalah satu-satunya jalan bahwa cycle dapat diputus (dihilangkan). Bila derajat sebuah cycle lebih besar dari satu, maka kita ambil sebagai arus recycle dan tidak dapat ditentukan dengan cepat arus manakah yang terbaik.

Jika frekuensi kolom j sama atau lebih besar dari pada kolom k dan jika kolom j mempunyai elemen-elemen yang non zero disemua baris dimana kolom k mempunyai elemen non zero maka kolom k dinamakan be contain (terkandung) di kolom j.

Contoh :

Untuk tabel diatas kolom S₁ dan S₃ terkandung dalam kolom S₂, kolom S₅ dan S₆ terkandung dalam kolom S₄ dan kolom S₈ terkandung dalam kolom S₇. Nampaklah bahwa kita tidak usah bersusah-susah dengan S₁ sebagai arus recycle untuk memutus/memecah cycle C, karena pemilihan S₂ sebagai recycle akan memecah cycle A dan juga cycle C. Contained column dapat diabaikan sebagai calon untuk arus-arus recycle.

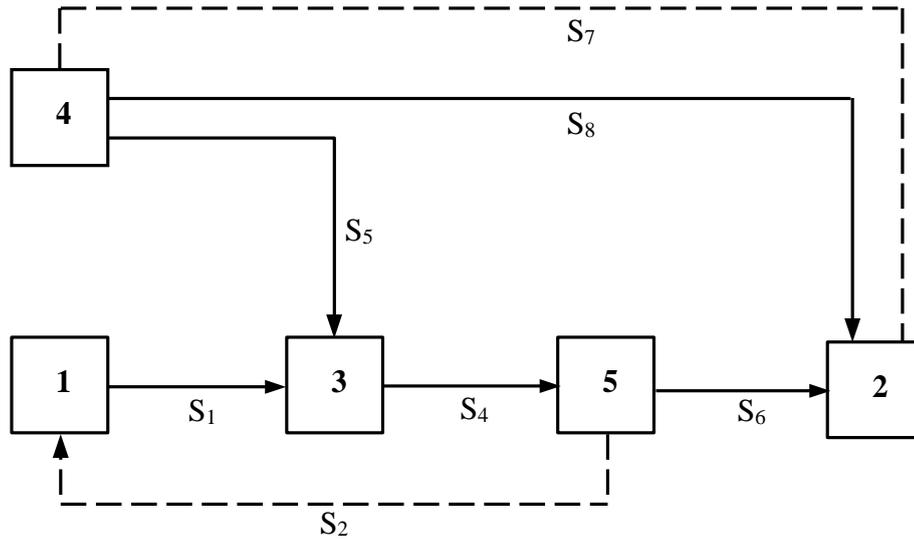
Jika semua contained column sudah dihapuskan dari cycle tabel maka kolom-kolom yang masih ada dikatakan independent pada gambar berikut dapat kita lihat bahwa penghapusan contained column mengurangi jumlah calon untuk arus-arus recycle.

S ₂	S ₄	S ₇
----------------	----------------	----------------

A	1			1
B			1	1
C	1	1		2
D		1	1	2
	2	2	2	

Gambar 2.20. Cycle tabel untuk beberapa arus *recycle*.

Dalam kasus ini pemeriksaan derajat dari *cycle-cycle* nya menunjukkan bahwa arus-arus *recycle* adalah S_2 dan S_7 pemilihan kedua arus itu memecah semua cycle dalam sistem. Dengan pemilihan S_2 dan S_7 sebagai arus *recycle* diperoleh struktur sebagai berikut :



Gambar 2.21. Struktur arus *recycle* S_2 dan S_7 .

Tabel 2.3. Perhitungan untuk beberapa *recycle*.

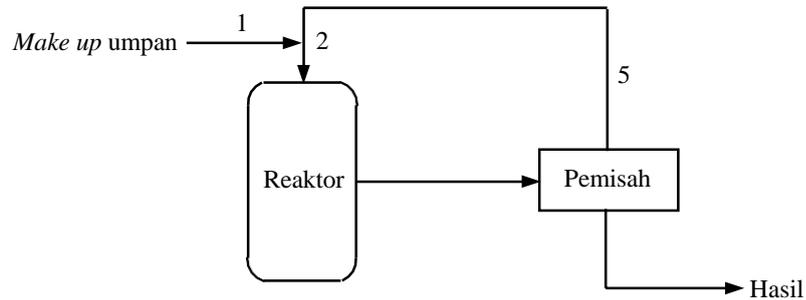
	S_1	Cycle desing									
A											
B											
C											
D											
E											
F											
G											

am											
----	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--

Perhitungan-perhitungan *recycle* (daur ulang). Adanya *recycle loop* sering tidak bias dihindarkan → diperlukan beberapa perhitungan-perhitungan *nerative* yang pendek untuk menyelesaikan persamaan-persamaan perancangan dalam *recycle loop* tersebut.

Contoh :

Gambar suatu sistem yang mempunyai *recycle loop* seperti Gambar 2.23 di bawah ini.



Gambar 2.22. *Recycle loop*.

Pada sistem pemisah-pemisah tersebut umpan masuk ke proses dan dicampur dengan daur ulang dari umpan yang tidak bereaksi arus (campuran) ini masuk ke reaktor dimana sebagian bereaksi menjadi hasil (konversi 50%). Arus dari reaktor dialirkan ke pemisah untuk dipisahkan bagian yang tidak bereaksi dengan hasil reaksi. Persamaan-persamaan yang menerangkan proses tersebut adalah :

1. $A_3 = 0,5 A_2$ (konversi 50% dalam reaktor)
2. $A_3 = A_5$ (semua umpan yang tidak bereaksi didaur ulang)
3. $A_2 = A_1 + A_5$ (pencampuran arus daur ulang dan umpan segar)
4. $A_1 = 1000$ (jumlah umpan ke sistem)

Catatan : A = laju aliran reaktan (tidak termasuk hasil).

Jika diselesaikan secara analisis Persamaan (1) disubstitusikan ke Persamaan (2) didapat :

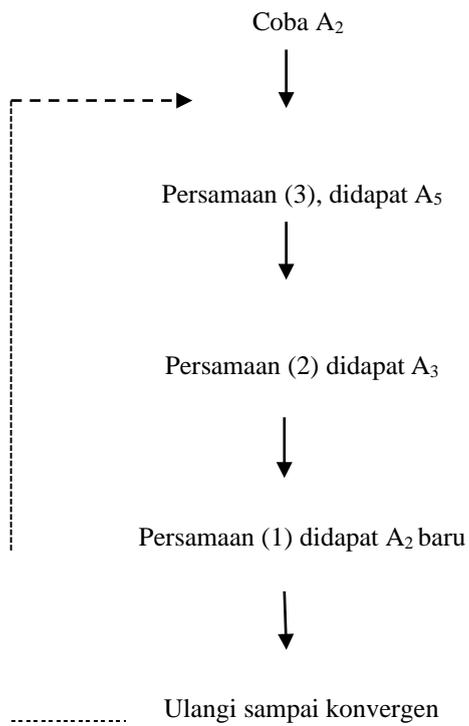
$$5. A_2 = 2A_5$$

Persamaan (5) disubstitusi ke Persamaan (3) diperoleh :

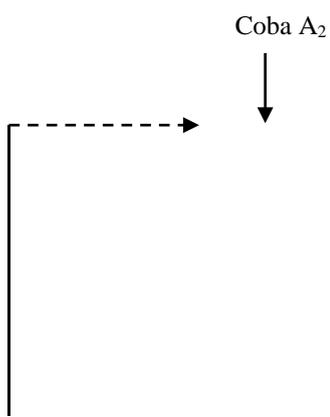
$$6. A_1 = A_5$$

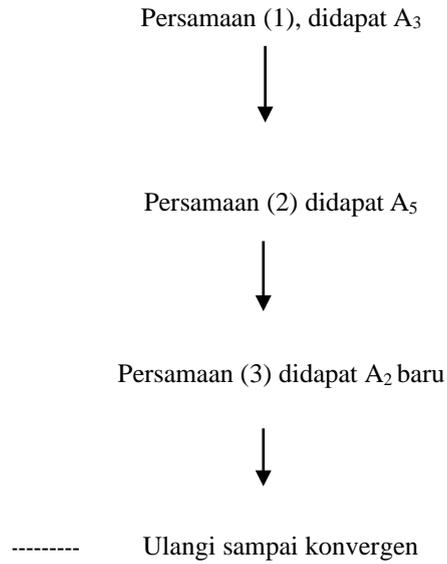
Jadi $A_1 = A_3 = A_5 = 1000$ dan $A_2 = 2A_3 = 2000$ (dari Persamaan P).

Untuk suatu sistem yang lebih kompleks → perlu cara perhitungan pendekatan secara *nerative* → perlu strategi proses perhitungan yang tepat. Gambar dibawah ini merupakan urutan perhitungan (Gambar 2.23) dan hasilnya pada Gambar 2.24. Gambar 2.24 → Gambar 2.23 urutan yang beda memberikan hasil beda urutan perhitungan pada Gambar 2.23(a) dan Gambar 2.23(b) berturut-turut memberikan hasil divergen dan konvergen.



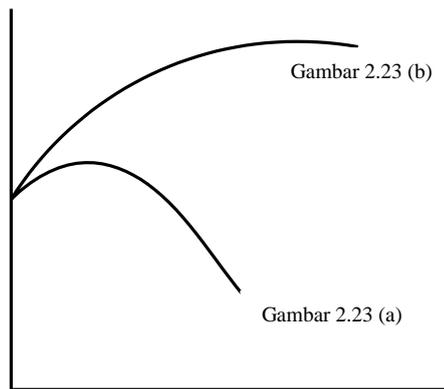
(a)





(b)

Gambar 2.23(a) dan (b). Langkah-langkah penyelesaian persoalan pada sistem kompleks.



Gambar 2.24. Hasil perhitungan algoritma dari Gambar 2.23(a) dan 2.23(b).

A. Evaluasi

1. Jelaskan pengertian derajat kebebasan
2. Jelaskan bagaimana menentukan jumlah derajat kebebasan dari suatu peralatan.
3. Buatlah contoh kasus derajat kebebasan.

B. Buku Sumber, Bacaan Pendukung

Douglas, J.M., 1988, "Conceptual Design of Chemical Processes"

Linnhoff, B., and Flower, J.R., 1978, "Syntesis of Heat Exchanger Networks", AIChEJ, vol. 24.

Rudd, D.F., and Watson, C.C., 1968, "Strategy of Process Engineering", John Wiley and Sons, Inc., New York

Stoecker, W.F., 1989, "Design of Thermal System", Mc Graw Hill International Edition, Singapore.

Townsend, D.W., and Linnhoff, B., 1982, "Designing Total Energy System by Systematic Methode", Chem. Eng. No.378, London

BAB 3

PERISTIWA PERPINDAHAN

1.1. Peristiwa Perpindahan

Dalam menghadapi perancangan alat proses, orang ingin mendapat gambaran sejelas mungkin dari kejadian yang akan berlangsung dalam alat itu. Analisis system Teknik Kimia akan mendapatkan gambaran atau perkiraan itu ia dapat memperoleh keterangan-keterangan kualitatif dan semi-kuantitatif tentang proses itu. Keterangan-keterangan ini akan berguna sekali dalam perancangan alat tadi.

Kejadian fisis akan selalu dibarengi oleh berpindahnya satu atau lebih dari tiga besaran yang berikut : massa, momentum dan energi (panas). Peristiwa perpindahan ini akan dijumpai dalam semua operasi teknik kimia. Cabang ilmu yang disebut “peristiwa perpindahan” mempelajari kejadian-kejadian fisis yang berlangsung selama suatu proses terjadi, dan mencari suatu model matematis, yang dapat menggambarkan perubahan-perubahan yang berlangsung dalam peristiwa itu.

Model matematis ini menggambarkan kejadian itu secara ideal. Dalam proses analisis system teknik kimia dihadapi peristiwa dalam keadaan yang nyata. Keadaan yang sebenarnya itu memperlihatkan adanya berbagai faktor teknis yang berpengaruh, yang tidak terdapat dalam keadaan ideal.

Untuk dapat menerapkan persamaan-persamaan, yang diperoleh secara teori dalam peristiwa perpindahan, kedalam masalah-masalah teknik diperlukan pengetahuan tentang faktor-faktor teknis yang disebut di atas dan cara mengatasinya. Walaupun hasil-hasil penurunan secara teori tidak dapat diterapkan secara langsung, namun persamaan itu dapat memberikan gambaran dan pengertian yang lebih jelas dari besaran-besaran yang berpengaruh dalam peristiwa itu dan perilakunya.

Peninjauan mekanisma peristiwa-peristiwa itu dilakukan dengan menggunakan matematika sebagai alat bantu utama. Karena itu mereka yang ingin mendalami peristiwa perpindahan, perlu menguasai bagian-bagian matematika yang dibutuhkan, yaitu terutama ilmu hitung diferensial dan integral dan penyelesaian persamaan diferensial. Dalam menggunakan matematika itu, semua besaran dan sifat fisis diperlakukan sebagai berubah. Dengan sendirinya ketentuan-ketentuan ilmu-ilmu fisika, kimia fisik dan termodinamika masih tetap berlaku terhadap berubah-ubah itu, karena berubah-ubah itu mewakili besaran dan sifat fisis tadi.

Hal yang terakhir memerlukan pemahaman yang mendalam. Jadi harus selalu diingat, bahwa berubah-ubah yang digunakan dalam bentuk-bentuk matematis itu tetap merupakan besaran fisis. Dengan demikian tiap-tiap berubah (besaran fisis) itu tetap mengikuti ketentuan dan hukum fisika yang berlaku baginya. Pengertian yang makin mendalam tentang hal ini akan diperoleh, bila kita makin sering mencoba memecahkan masalah-masalah perpindahan.

Dengan menggunakan matematika diusahakan supaya perubahan-perubahan dalam suatu peristiwa dapat dinyatakan dengan persamaan matematis. Usaha ini selalu diawali dengan membuat suatu neraca, yaitu neraca massa, neraca momentum atau neraca panas. Neraca-neraca itu didasarkan atas ketiga hukum kekekalan :

Hukum kekekalan massa.

Hukum kekekalan momentum.

Hukum kekekalan energi.

Yang menyatakan, bahwa massa, momentum dan energi (panas) tidak dapat musnah, akan tetapi hanya berubah bentuk.

Semua peristiwa menunjukkan adanya perubahan. Juga peristiwa perpindahan memperlihatkan berubahnya besaran dan sifat fisis. Perubahan itu dinyatakan dengan perbandingan diferensial sesuai dengan ilmu hitung diferensial.

Untuk dapat menyatakan perpindahan diperlukan pula satu sistem koordinat dan suatu sistem satuan. Untuk memudahkan perhitungan maka selalu dipilih sistem koordinat yang sesuai dengan bentuk geometri dalam persoalan.

Dengan menggunakan segala alat bantu, yang diuraikan di atas, maka ilmu “peristiwa perpindahan” bertujuan menemukan fungsi matematis yang dapat menyatakan perubahan-perubahan dalam peristiwa itu sebaik mungkin.

Catatan ini disusun sebagai berikut :

Sesudah pendahuluan, berturut-turut akan dibicarakan perpindahan momentum, perpindahan panas dan perpindahan massa. Pembahasan perpindahan momentum itu didahulukan dan pembicaraannya lebih luas dari kedua bab yang lain. Karena pentingnya kedudukannya, sebab hampir tidak ada masalah teknik yang tidak menyangkut suatu fluida yang mengalir atau bergerak. Pembahasan perpindahan panas dan massa banyak menggunakan analogi dengan hasil pembahasan perpindahan momentum. Karena itu untuk dapat mengikuti pembicaraan perpindahan panas dan massa, maka perlu dikuasai bab tentang perpindahan momentum.

Pembahasan tiap jenis perpindahan diawali dengan pembicaraan dasar-dasar perpindahan dan masalah-masalah pokok. Kemudian menyusul contoh-contoh yang dimaksudkan untuk memberikan pengertian yang lebih mendalam dan pengenalan dengan masalah-masalah yang termasuk dalam ruang lingkup teori.

Selain mempelajari teori yang disajikan dalam catatan kuliah ini, perlu dilakukan latihan membuat soal secara luas, agar dapat menerapkan ilmu itu secara lancar. Untuk itu dimuat soal-soal untuk latihan, yang di tempatkan sesudah pembahasan teori yang bersangkutan. Dalam lampiran dimuat juga penyelesaian secara ringkas beberapa soal-latihan, dengan maksud membantu mahasiswa dalam pemecahan soal-soal yang serupa.

Materi kuliah ini disusun berdasarkan beberapa sumber buku. Buku-buku itu memuat masalah yang lebih banyak, baik jenis maupun jumlahnya. Untuk memperdalam pengetahuan dan untuk mendapatkan cara penjelasan yang lain terutama tentang bagian-bagian yang rumit.

Karena pustaka menggunakan rupa-rupa sistem satuan, maka diperlukan keterampilan mengubah satuan besaran dari suatu sistem ke sistem yang lain. Untuk itu di dalam lampiran dimuat daftar konversi satuan-satuan itu.

1.2. Hukum-hukum Kekekalan

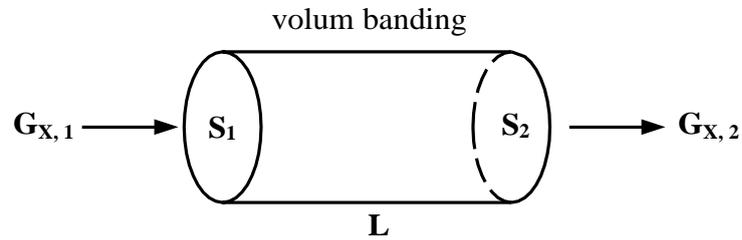
Analisa peristiwa-peristiwa fisis didasarkan atas tiga hukum kekekalan yang sudah disebut lebih dulu. Jika X itu dimisalkan massa, momentum atau energi, maka secara umum hukum kekekalan itu dapat dinyatakan sebagai berikut :

$$\begin{aligned} & (\text{akumulasi } X \text{ dalam sistem per satuan waktu}) = \\ & (\text{laju alir } X \text{ masuk sistem per satuan waktu}) - (\text{laju alir } X \text{ keluar sistem per satuan waktu}) \\ & + (\text{timbulnya } X \text{ baru dalam sistem per satuan waktu}) \end{aligned} \quad (3-1)$$

Sistem yang dimaksud dapat berupa apa saja, akan tetapi dalam soal teknik biasanya suatu alat. Dapat juga yang ditinjau itu hanya sebagian dari suatu sistem, jadi suatu subsistem. Dalam hal sistem itu sebuah alat, maka batas-batasnya sudah jelas. Dalam hal sub-sistem tanpa batas yang nyata, maka batas-batas itu harus ditetapkan, sebab tanpa menetapkan batas sistem Persamaan (3-1) tidak dapat diterapkan. Jadi perlu ditetapkan batas-batas sistem, yang disebut volum-banding.

Marilah neraca itu diterapkan pada contoh berikut ini. Misalkan ada satu sistem dengan luas penampang S dan panjang L (lihat Gambar 3.1). Laju alir besaran X per satuan luas penampang adalah G_X . Kecepatan X baru yang timbul atau diproduksi per satuan volum dalam sistem adalah R_X . Akumulasi X per satuan waktu dapat dinyatakan sebagai perubahan konsentrasi X per satuan waktu, atau $d[X]/dt$. Akumulasi dalam seluruh sistem menjadi $S_r \cdot Ld[X]/dt$, dimana

S_r = luas penampang rata-rata (R.B. Bird, W.E. Stewart & E.N. Lightfoot, Transport Phenomena, Jhon Wiley, 1965).



Gambar 3.1. Neraca Makro.

Dalam menerapkan Persamaan (3-1), dibuat neraca besaran X untuk sistem itu dan diperoleh :

$$(S L)_r \frac{d[X]}{dt} = G_{X,1} \cdot S_1 - G_{X,2} \cdot S_2 + (S_r \cdot L) R_X \quad (3-2)$$

Persamaan (3-2) telah diperoleh dengan menyusun masing-masing suku dalam Persamaan (3-1) sesuai dengan sistem yang sedang dipelajari, sebagai berikut :

$$\text{Akumulasi X} = (\text{volum}) (\text{perubahan konsentrasi per satuan waktu}) = (S L)_r \frac{d[X]}{dt}$$

$$\text{Laju alir X masuk} = (\text{laju alir pada penampang 1}) (\text{luas penampang 1}) = G_{X,1} \cdot S_1$$

$$\text{Laju alir X keluar} = (\text{laju alir pada penampang 2}) (\text{luas penampang 2}) = G_{X,2} \cdot S_2$$

$$\text{Timbulnya X baru} = (\text{volum}) (\text{laju produksi X}) = (S_r \cdot L) R_X$$

Kalau keempat besaran diatas dimasukkan ke dalam Persamaan (3-1), diperoleh Persamaan (3-2). Persamaan (3-2) selalu merupakan persamaan differensial, yang umumnya dapat diselesaikan secara langsung dengan cara-cara matematika. Hasil penyelesaian persamaan differensial itu menghasilkan suatu fungsi, yang secara matematis menggambarkan peristiwa yang sedang ditinjau itu. Fungsi tadi disebut model matematis untuk kejadian itu.

Persamaan (3-1) dapat diterapkan pada sebarang sistem. Untuk itu lebih dahulu harus ditetapkan volum-banding dan besaran yang akan ditinjau. Hal ini akan sering dilakukan selama mempelajari peristiwa perpindahan.

Evaluasi

1. Jelaskan pengertian Peristiwa perpindahan
2. Jelaskan bagaimana peristiwa perpindahan terjadi pada suatu system
3. Buatlah contoh peristiwa perpindahan

A. Buku Sumber, Bacaan Pendukung

W.J. Beek & K.M.K. Muttzall, Transport Phenomena, Jhon Wiley, 1975.

R.B. Bird, W.E. Stewart & E.N. Lightfoot, Transport Phenomena, Jhon Wiley, 1965.

Douglas, J.M., 1988, "Conceptual Design of Chemical Processes"

BAB 4

PERPINDAHAN MASSA

4.1. Difusi

Juga dalam perpindahan massa dikenal dua cara perpindahan dan difusi. Massa berpindah secara konveksi karena terbawa aliran dan aliran disebabkan oleh gaya dari luar system. Dalam difusi molekul-molekul bergerak satu terhadap yang lain karena adanya gaya penggerak di dalam system, yaitu perbedaan konsentrasi.

Perpindahan massa karena konveksi sudah dijumpai lebih dahulu dalam pembahasan perpindahan momentum. Pangkal analisa adalah hukum kekekalan massa yang sudah diturunkan menjadi persamaan kontinuitas. dalam semua masalah aliran selalu dimulai dengan persamaan kontinuitas.

Akan tetapi selama ini yang ditinjau hanya massa secara makro, secara keseluruhan. Dalam persamaan laju perpindahan massa dinyatakan sebagai fluksi massa $d(v_z)$ dan laju akumulasi sebagai perubahan density ρ . kalau dihadapi suatu campuran dari dua penyusun atau lebih. Maka lebih sesuai kalau semua besaran dinyatakan secara molar

- laju akumulasi zat A dinyatakan sebagai perubahan konsentrasi : $\frac{dC_A}{dt}$
- laju perpindahan zat A sebagai fluksi A, N_A mol (luas)⁻¹ (waktu)⁻¹

Kalau diinginkan hanya meninjau neraca massa zat A, maka Persamaan (4-1) perlu diubah dengan jalan membagi semua suku dengan Berat Molekul zat A, sehingga diperoleh persamaan kontinuitas untuk zat A (dalam koordinat tegak lurus)

$$\frac{\partial C_A}{\partial t} + \frac{\partial N_{AX}}{\partial x} + \frac{\partial N_{AY}}{\partial y} + \frac{\partial N_{AZ}}{\partial z} = R_A \quad (4-1)$$

Dalam Persamaan (4-1) selain ditinjau akumulasi zat A berdasarkan konveksi, juga dimuat perubahan banyaknya zat A itu oleh suatu reaksi, R_A yang menyatakan besarnya laju pembangkitan atau pengurangan A dalam satu satuan volum.

Untuk mendapat pengertian yang lebih baik dari masalah perpindahan sering diadakan perbandingan antara perpindahan momentu, panas dan massa. Analogi ini memperlihatkan kemiripan-kemiripan ini akan dibahas kemudian.

Gambaran pertama dapat diperoleh dengan meninjau perbedaan antara ketiga perpindahan itu. Perhatikan contoh-contoh di bawah ini.

- I. Pembangkitan massa (karena reaksi kimia) bergantung secara rumit sekali pada konsentrasi molar dan temperatur, sedangkan pengaruh konsentrasi dan temperatur pada pembangkitan momentum dan panas tidak besar.
- II. Permukaan antar fasa yang dilewati oleh massa biasanya bergerak (antara dua cairan, atau antara gas dan cairan). Sedangkan pada perpindahan panas hampir selalu ditemui permukaan antar fasa yang berupa dinding padat.

III. Tingkat besarnya nilai koefisien difusi D untuk cairan dan padatan lebih kecil dari difusivitas termal α , atau viscositas kinematis ν . ini berarti bahwa menjalarnya massa dalam cairan dan padatan lebih kecil dari pada menjalarnya momentum atau panas. Contoh-contoh dibawah ini mungkin dapat menjelaskan sifat di atas.

Zat	$D \text{ m}^2 \text{ det}^{-1}$	$\alpha = k / \rho C_p \text{ m}^2 \text{ det}^{-1}$	$\nu = \mu / \rho \text{ m}^2 \text{ det}^{-1}$
Udara	$\sim 2 \cdot 10^{-5}$	$20 \cdot 10^{-6}$	$14,2 \cdot 10^{-6}$
Air	$5 \cdot 10^{-9}$	$0,143 \cdot 10^{-6}$	$1 \cdot 10^{-6}$
Baja tahan karat	-	$7,45 \cdot 10^{-6}$	-

Untuk dapat melihat kesamaan antara ketiga perpindahan, marilah kita tinjau lebih mendalam mekanisme difusi. Molekul-molekul zat A bergerak ke satu arah diantara molekul-molekul zat B umpamanya, sedangkan molekul-molekul zat B mungkin diam atau bergerak dengan arah yang berlawanan. Gerakan molekul-molekul ini ditimbulkan oleh adanya perbedaan konsentrasi dan menuju dari tempat dengan konsentrasi tinggi ke tempat dengan konsentrasi rendah. Kalau perpindahan massa

secara konveksi dikuasai oleh sifat aliran, difusi bergantung pada besarnya gradient konsentrasi $\frac{dC_A}{dx}$.

Untuk difusi berlaku hukum fick yang pertama.

$$N_{ax} = D_A \frac{dC_A}{dx} \quad (4-2)$$

Sekali lagi dijumpai satu hokum dalam bentuk persamaan laju alir : Fluksi = koefisien x gradient.

Dalam Persamaan (4-2) D_A merupakan sifat fisis molekul-molekul zat, dan Persamaan (4-2) merupakan definisi koefisien difusi atau difusivitas sebenarnya, D didefinisikan sedemikian sehingga hasil netto perpindahan itu melalui suatu bidang yang tetap adalah nol. Jika hal ini diterapkan pada campuran berpenyusun-dua (biner), maka dapat disimpulkan, bahwa untuk setiap mol zat A yang melewati bidang $x = x$, ada satu mol zat B yang melalui bidang itu ke arah yang berlawanan. Dengan demikian laju alir netto = 0 dan $\rho = \text{tetap}$. Kalau diartikan bahwa

D_{AB} = koefisien difusi untuk gerakan zat A diantara zat B, maka

D_{BA} = koefisien difusi untuk gerakan zat B diantara zat A.

Untuk difusi dalam campuran berpenyusun-dua, Persamaan (4-2) dapat ditulis sebagai berikut :

$$\text{Untuk A : } N_A = D_{AB} \frac{dC_A}{dx} \quad (4-3)$$

$$\text{Untuk B : } N_B = D_{BA} \frac{dC_B}{dx} \quad (4-4)$$

Berdasarkan definisis maka

$$N_A + N_B = 0$$

dan

$$D_{AB} = D_{BA}$$

Dari Persamaan (4-3) dapat disimpulkan, bahwa D mempunyai dimensi $L^2.t^{-1}$, atau dalam sistem SI $m^2 \text{ detik}^{-1}$. Dalam hubungan itu dapat diperlihatkan kemiripan antara ketiga perpindahan momentum, panas dan massa. Hukum yang berlaku untuk masing-masing perpindahan dapat dinyatakan dalam persamaan fluksi yang serupa :

Hukum Newton

$$\tau_{yz} = -\nu \frac{d(\rho v_z)}{dy} \quad (\rho \text{ tetap}) \quad (4-5)$$

Hukum Fourier

$$q_y = -\alpha \frac{d(\rho C_p T)}{dy} \quad (\rho \sigma p \text{ tetap}) \quad (4-6)$$

Hukum Fick

$$N_{AY} = -D_{AB} \frac{dC_A}{dy} \quad (\rho \text{ tetap}) \quad (4-7)$$

Dari persamaan-persamaan itu dapat disimpulkan sebagai berikut :

- Suku dalam ruas kiri merupakan fluksi : fluksi momentum, fluksi panas dan fluksi molar zat A.
- Ruas kanan berupa hasil kali suatu koefisien dan suatu gradient.
- Semua koefisien berdimensi sama $m^2 \text{ detik}^{-1}$, yaitu

$$\frac{\mu}{\rho}, \alpha = \frac{k}{\rho C_p} \text{ dan } D_{AB}$$

- Semua gradient adalah gradient “konsentrasi” besaran-besaran yang disebut pada a.

4.2. Perpindahan Massa

Dalam proses operasi teknik kimia hampir selalu terjadi perpindahan massa karena konveksi dan difusi. Hukum Fick pertama, yang dalam bentuk Persamaan (4-7) hanya berlaku untuk difusi, dapat diubah kedalam bentuk lain yang meliputi konveksi dan difusi. Kalau v = kecepatan alir campuran yang tetap dan C = konsentrasi total campuran, maka

$$N_{AX} = V_{AX} C_A = \text{fluksi A mol (luas)}^{-1} (\text{waktu})^{-1}$$

$$V_C = N_{AX} + N_{BX}$$

sehingga

$$V_{AX} C_A = D_{AB} \frac{dC_A}{dx} \quad (4-8)$$

Dalam Persamaan (4-8) V_A dinyatakan dengan system koordinat yang tetap tempatnya dalam ruang. Kalau diambil sebagai bandingan suatu titik yang ikut bergerak sama cepat dengan kecepatan campuran v , maka kecepatan molekul-molekul A menjadi $(v_A - v)$ dan Persamaan (4-8) berubah menjadi

$$(v_{AX} - v)C_A = D_{AB} \frac{dC_A}{dx} \quad (4-9)$$

atau

$$v_{AX} C_A = N_{AX} = D_{AB} \frac{dC_A}{dx} + (N_{AX} + N_{BX}) \frac{C_A}{C} \quad (4-10)$$

Difusi

Konveksi

Persamaan (4-10) disebut Hukum Fick yang kedua. Suku pertama dalam ruas kanan Persamaan (4-10) menyatakan besarnya perpindahan massa oleh difusi dan suku kedua adalah banyaknya mol A yang dipindahkan oleh aliran. Supaya sapat menyelesaikan Persamaan (4-10), perlu diketahui hubungan antara N_A dan N_B . dalam hal ini diketahui ada dua bataskemungkinan, yaitu

- I. $N_{AX} + N_{BX} = 0$, keadaan ini disebut equimolar counter diffusion (difusi jumlah mol yang sama dalam arah yang berlawanan).
- II. $N_{BX} = 0$, keadaan ini disebut difusi zat A melalui zat B yang diam.

Dalam praktek sering dijumpai difusi keadaan di antara kedua batas itu, akan tetapi karena perbedaan antara kedua keadaan itu sering kecil, sering dapat diadakan perkiraan ukuran dengan menggunakan salah satu dari kedua keadaan itu.

$$N_{AX} + N_{BX} = 0$$

Persamaan (4-10) dapat disederhanakan menjadi

$$N_{AX} = -D_{AB} \frac{dC_A}{dx}$$

Persamaan diatas dapat juga diturunkan dari persamaan kontinuitas untuk penyusun A dengan menggunakan syarat-syarat yang berikut

- keadaan mantap
- hanya ditinjau difusi ke arah x
- tidak ada reaksi

hasil yang diperoleh adalah

$$\frac{dN_{AX}}{dx} = 0 \quad (4-11)$$

Yang sesudah integrasi memberikan

$$N_{AX} = c_1 = \text{tetap} \quad (4-12)$$

Jika Persamaan (4-12) dibandingkan dengan Persamaan (4-3) dapat diambil kesimpulan, bahwa $D_{AB} = \text{tetap}$ dan gradient konsentrasi juga tetap. Penyebaran konsentrasi dapat diperoleh dengan jalan mengintegrasikan Persamaan (4-3) dengan menggunakan syarat batas.

- Syarat batas 1 : pada $x = x_1 \rightarrow C_A = C_{A1}$
- Syarat batas 2 : pada $x = x_2 \rightarrow C_A = C_{A2}$

Yang menghasilkan fungsi linear berikut

$$\frac{C_A - C_{A2}}{C_{A1} - C_{A2}} = \frac{x_2 - x}{x_2 - x_1} \quad (4-13)$$

Dari Persamaan (4-13) dapat diturunkan besarnya fluksi A kearah x, N_{AX} . Dengan jalan menghitung gradient konsentrasi $\frac{dC_A}{dx}$ dari Persamaan (4-13) dan memasukkannya ke dalam Persamaan (4-3), menjadi

$$N_{Ax} = D_{AB} \frac{C_{A1} - C_{A2}}{x_2 - x_1} \quad (4-14)$$

Ternyata, bahwa difusi searah dapat dipersamakan dengan konduksi panas, asal dilakukan pergantian perubah seperti berikut

$$Q \rightarrow N_A$$

$$\rho C_p \rightarrow C_A$$

$$Q \rightarrow D_{AB}$$

Analogi konduksi dan difusi

Konduksi Panas	Difusi Searah
$Q_y = -k \frac{dT}{dy}$	$N_{AY} = -D_{AB} \frac{dc_A}{dy}$
$Q_{1-2} = k_{12} \frac{(T_1 - T_2)}{(x_2 - x_1)}$	$N_{AX} = D_{AB} \frac{(C_{A1} - C_{A2})}{x_2 - x_1}$

Kesamaan itu berlaku untuk konduksi panas searah dan difusi searah. Persamaan-persamaanya dapat dipertukarkan dengan melakukan pergantian perubahan seperti diatas. Cara-cara berdasarkan analogi ini dapat diperluas dengan keadaan lain. Umpamanya memperoleh sifat-sifat difusi di sekeliling bola atau silinder dari persamaan-persamaan konduksi disekitar benda yang sama. untuk itu harap dibaca buku-buku yang dianjurkan

$$N_{BX} = 0$$

Persamaan (4-10) dalam hal ini berubah menjadi

$$N_{AX} = -D_{AB} \frac{dC_A}{dx} + N_{AX} \frac{C_A}{C}$$

atau

$$N_{AX} = -D_{AB} \cdot \frac{c}{c - c_A} \frac{dc_A}{dx} \quad (4-15)$$

Jika diturunkan dari neraca massa Persamaan (4-1) diperoleh hal yang sama dengan difusi ekimolar, yaitu Persamaan (4-12). jadi juga di sini fluksi A itu tetap, yang sesuai dengan sifat keadaan mantap.

Dengan mengintegrasikan Persamaan (4-15) dan menggunakan syarat batas yang sama, yaitu

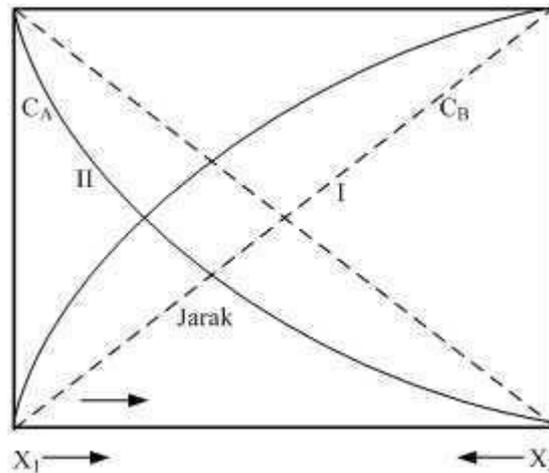
Syarat batas 1 : pada $x = x_1 + C_A = C_{A1}$

Syarat batas 2 : pada $x = x_2 - C_A = C_{A2}$

Diperoleh penyebaran konsentrasi A.

$$\frac{c - c_A}{c - c_{A1}} = \left(\frac{c - c_{A2}}{c - c_{A1}} \right)^{\frac{x-x_1}{x_2-x_1}} \quad (4-16)$$

Kedua penyebaran konsentrasi (4-13) dan (4-16) digambarkan pada Gambar (4.1).



Gambar 4.1. Penyebaran konsentrasi pada difusi ekimolar (I) dan pada difusi melalui fluida yang diam (II)

2. Koefisien Perpindahan Massa

Bahwa terdapat kemiripan (analogi) antar perpindahan momentum, panas dan massa sudah dijumpai lebih dahulu pada bagian 1.1 tentang difusi. Dalam bagian ini dan bagian berikutnya akan dibahas kemiripan yang lebih lanjut.

Untuk perpindahan panas antara sebuah permukaan padat dan fluida di sekitarnya, dikenal “hukum pendinginan Newton” :

$$Q = h (T_{\text{permukaan}} - T_{\text{fluida}}) \quad (4-17)$$

dimana h disebut koefisien pindah panas

untuk perpindahan massa antara suatu permukaan antar fasa di sekitarnya, dapat juga digunakan suatu koefisien pindah massa K yang didefinisikan dalam persamaan yang berikut :

$$N_A = k_A (c_{Aa} - c_{Af}) \quad (4-18)$$

dimana

N_A = fluksi mol zat A, $\text{mol m}^{-2}\text{det}^{-1}$

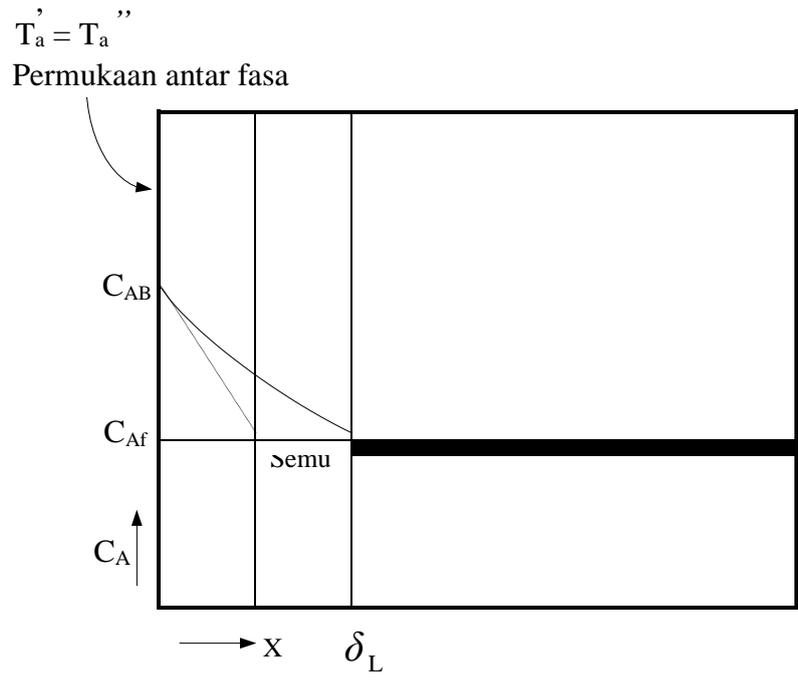
K_A = koefisien pindah massa zat A, m det^{-1}

c_{Aa} = konsentrasi zat A pada permukaan antar fasa, mol m^{-3}

c_{Af} = konsentrasi zat A dalam fluida, mol m^{-3}

Persamaan (4-2) berlaku untuk konveksi panas. Begitu juga Persamaan (4-17) berlaku untuk konveksi massa baik h maupun k_A adalah besaran-besaran yang nilainya harus ditetapkan dengan percobaan. bukan suatu sifat fisis tetapi menyatakan besarnya perpindahan pada permukaan tempat pertemuan dua fasa.

Dari selisih temperatur dalam Persamaan (4-2) dan selisih konsentrasi dalam Persamaan (4-17), satu besaran terdapat pada permukaan antarfasa itu sendiri ($T \rho .c_{Aa}$). sedang yang lain diukur dari tengah fluida. Dengan anggapan bahwa keadaan dalam fluida itu homogen, yaitu sama disemua tempat. Baik untuk temperatur, maupun untuk konsentrasi hal ini diatas adalah sama dengan mengaggap. Bahwa gradient itu lurus dan terletak dekat permukaan antar fasa dan penyebaran dalam fluida adalah merata. Pnyembara yang sebenarnya adalah kontinu, seperti digambarkan pada 4.2 untuk perpindahan massa. Untuk menanpung menampung “kesalahan” yang ditimbulkan oleh perbedaan penyebaran ini, maka h dan k_A harus ditentukan secara percobaan. Antara perpindahan panas dan perpindahan massa terdapat perbedaan, jika dihadapi beberapa tahanan berturut-turut seperti dalam perpindahan antarfasa. Untuk perpindahan panas temperatur pada permukaan antar fasa berlaku untuk kedua fasa. Gambaran kondisi ini dapat dilihat pada Gambar 4.2.

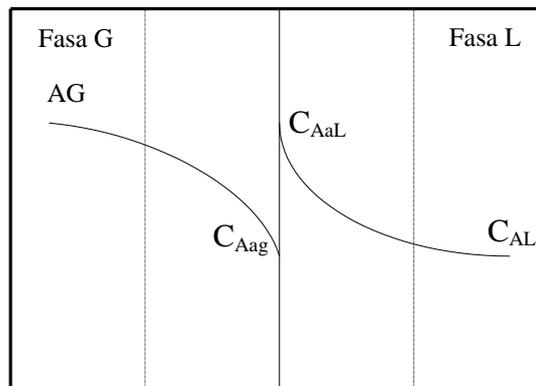


Gambar 4.2. Penyebaran Konsentrasi.

Karena itu tahanan panas keseluruhan adalah jumlah dari masing-masing tahanan panas parsial. Tidak demikianlah pada perpindahan massa. Konsentrasi dalam kedua fasa sebarang-menyeberang permukaan antarfasa biasanya tidak sama. Kalau kedua fasa itu berada dalam keadaan dalam keadaan setimbang, maka hubungan kedua fasa itu berada dalam keadaan setimbang, maka hubungan kedua konsentrasi dapat diperoleh dari percobaan.

Untuk perpindahan massa antarfasa yang sudah mantap penyebaran konsentrasi dapat digambarkan seperti pada Gambar 4.3.

Permukaan antar fasa



Gambar 4.3. Penyebaran konsentrasi seberang-menyebang permukaan antar fasa.

Dalam masing-masing fasa berlaku :

$$\text{Fasa G : } N_{AG} = k_{AG}(C_{AG} - C_{AaG})$$

$$\text{Fasa L : } N_{AL} = k_{AL}(C_{AaL} - C_{AL})$$

Karena keadaan mantap, maka :

$$N_{AG} = N_{AL} - k_{AG}(C_{AG} - C_{AaG}) = k_{AL}(C_{AaL} - C_{AL}) \quad (4-19)$$

Umpamakan hubungan kesetimbangan antara kedua fasa dapat dinyatakan dengan :

$$C_{AaG} = m C_{AaL} \quad (4-20)$$

Hubungan yang sama dengan Persamaan (4-19) itu dapat dijumpai pada campuran yang encer, seperti dinyatakan oleh hukum Hendry $Y^* = MX$, dengan menggunakan Persamaan (4-19), Persamaan (4-18) dapat diubah menjadi :

$$N_A = k_{AG}(C_{AG} - m C_{AaL}) = k_{AL}(C_{AaL} - C_{AL})$$

Kemudian C_{AaL} dihilangkan, karena tidak dapat diukur.

$$N_A = \frac{C_{AG} - m C_{AL}}{\frac{1}{k_{AG}} + \frac{m}{k_{AL}}} = \frac{C_{AG} - C_{AL}}{\frac{1}{K_{AG}}} \quad (4-21)$$

Dengan cara yang sama dapat diperoleh juga :

$$N_A = \frac{\frac{C_{AG}}{m} - C_{AL}}{\frac{1}{mk_{AG}} + \frac{1}{k_{AL}}} = \frac{\frac{C_{AG}}{m} - C_{AL}}{\frac{1}{k_{AL}}} \quad (4-22)$$

Coba lakukan sendiri penurunan Persamaan (4-20) dan (4-21), dalam bentuk Persamaan (4-20) dan (4-21) semua suku yang merupakan penyebut dinamakan tahanan atau tahanan pindah massa.

$$\text{Tahanan dalam fasa gas : } \frac{1}{k_{AG}} \text{ dan } \frac{1}{m k_{AG}}$$

$$\text{Tahanan dalam fasa cair : } \frac{m}{k_{AL}} \text{ dan } \frac{1}{k_{AL}}$$

$$\text{Tahanan keseluruhan } \frac{1}{K_{AG}} = \frac{1}{k_{AG}} + \frac{m}{k_{AL}}$$

atau

$$\frac{1}{K_{AL}} = \frac{1}{m k_{AG}} + \frac{1}{k_{AL}}$$

Jadi dari Persamaan (4-20) dan (4-21) ternyata, bahwa kalau selisih konsentrasi dinyatakan secara keseluruhan, maka tahanan pindah massa merupakan jumlah tertentu dari tahanan parsial. Dengan menggunakan hubungan kesetimbangan. Jumlah ini dinamakan tahanan pindah massa keseluruhan $1/k$. sehingga k adalah koefisien pindah massa keseluruhan. ternyata juga bahwa k harus dinyatakan terhadap salah satu fasa jadi K_{AG} atau K_{AL} . Dalam operasi teknik kimia tekanan parsial sudah biasa digunakan orang untuk menyatakan konsentrasi dalam fasa gas, dari pada konsentrasi molar, umpamanya :

$$N_A = k_{AG} (p_{A_{ag}} - p_{A_g}) \quad (4-23)$$

dimana

$$K_{AG} = \frac{k_{AG}}{RT}$$

Karena itu dengan maksud supaya persamaan tetap homogen dimensinya, maka untuk perpindahan cairan-gas konsentrasi dalam fluida diganti dengan konsentyrasi-semu kesetimbangan c^* . sebagai berikut :

$$C^*_{AG} = m c_{AL} \quad (4-24)$$

$$C_{AG} = m c^*_{AL} \quad (4-25)$$

Dengan persamaan kesetimbangan pada Persamaan (4-23) dan (4-24), ruas terakhir Persamaan (4-20) dan (4-21) dapat diubah menjadi :

$$N_A = K_{AG}(C_{AG}-C^*_{AG}) \quad (4-26)$$

$$N_A = K_{AL}(C^*_{AL} - C_{AL}) \quad (4-27)$$

Dengan Persamaan (4-25) dan (4-26) didefinisikan pula gaya gerak difusi yang harus dipakai bersamaan dengan pemakaian K_{AG} atau K_{AL} .

Kalau dalam Persamaan (4-25) hendak digunakan tekanan parsial, maka dapat ditulis

$$N_A = K_{AG}(p^*_{A_g} - p_{A_g}) \quad (4-28)$$

Dimana dimensi K_{AG} sudah tentu harus disesuaikan dengan penggunaan tekanan parsial itu, yaitu $RT K_{AG} = K_{AG}$ (periksalah kehomogenan dimensi persamaan yang terakhir ini).

3. Teori Lapisan (Film Teori)

Dalam masalah aliran dan perpindahan panas dipakai teori lapisan batas. Yang menyatakan, bahwa dapat dianggap ada lapisan tipis zat dekat permukaan antarfasa, yang memuat seluruh tahanan

terhadap perpindahan itu. Juga dalam hal perpindahan massa teori ini digunakan, biasanya dengan nama teori lapisan. Lapisan batas setebal δ itu dapat diturunkan mempunyai hubungan berikut :

Perpindahan momentum :

$$\frac{d}{\delta_V} = \frac{f}{2} \text{Re} \quad (4-29)$$

Perpindahan panas :

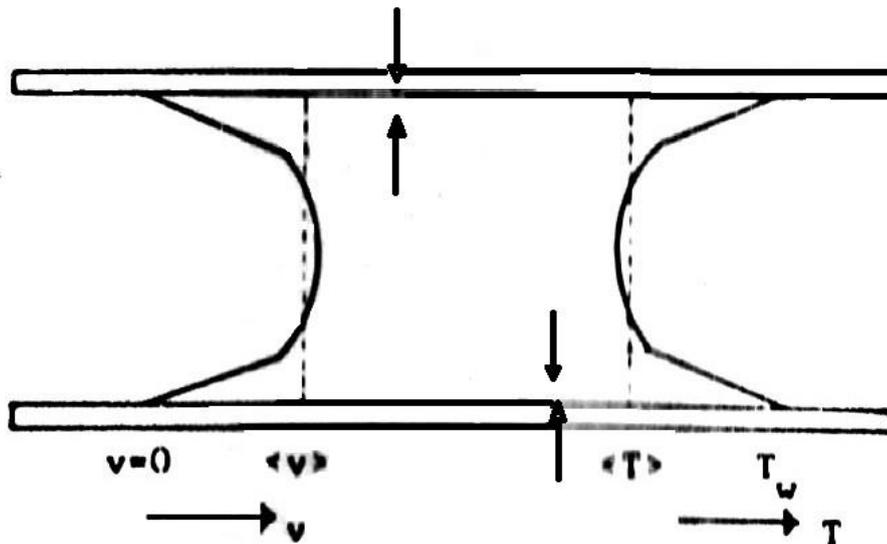
$$\frac{d}{\delta_T} = Nu \quad (4-30)$$

Perpindahan masa :

$$\frac{d}{\delta_C} = Sh \quad (4-31)$$

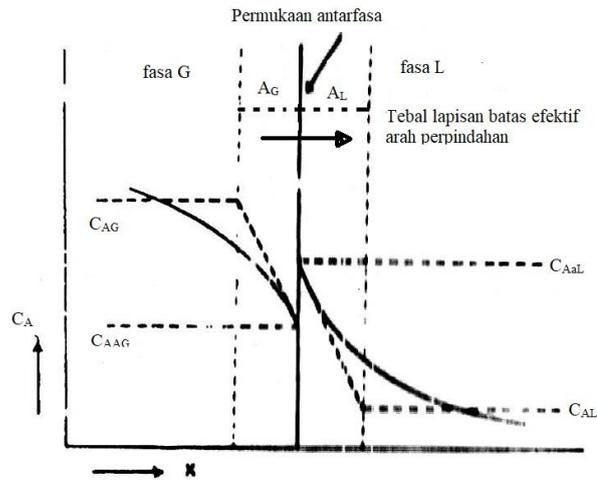
Dalam persamaan-persamaan diatas d = diameter atau ukuran panjang, dan $Sh = \frac{k_A d}{D}$ = bilangan Sherwood. Penyebaran yang diperoleh adalah sesuai dengan yang telah dibahas pada bagian 3 dan dapat dilihat pada Gambar 4.4 dan 4.5.

Dalam perpindahan massa antara dua fluida, umpamanya cairan-gas, lapisan batas dianggap ada pada kedua belah sisi permukaan antar fasa dan tahanan terhadap perpindahan massa ada pula dalam masing-masing lapisan.



Gambar 4.4. Lapisan batas dalam aliran bergolak.

Karena adanya dua lapisan yang sebelah menyebelahi teori tadi juga disebut teori dua lapisan (*two-film theory*).



Gambar 4.5. Teori dua lapisan.

Dari Persamaan (4-20) dan (4-21) dapat diturunkan

$$\frac{1}{K_{AG}} = \frac{1}{K_{AG}} + \frac{m}{K_{AL}} \quad (4-32)$$

$$\frac{1}{K_{AL}} = \frac{1}{mK_{AG}} + \frac{1}{K_{AL}} \quad (4-33)$$

Dalam kedua persamaan diatas masing-masing suku diruas kanan mewrupakan tekanan dalam fasa yang bersangkutan.

Untuk keperluan perhitungan dan percobaan, perlu dikemukakan adanya pengaruh nilai m terhadap Persamaan (4.31) dan (4.32) dalam grafik dengan konsentrasi dalam fasa gas sebagai ordinat dan konsentrasi dalam fasa cair sebagai absis m merupakan kemiringan (slope) garis grafik yang bersangkutan. Untuk sistem gas yang mudah larut, seperti HCl-Air m sedemikian kecil nilainya sehingga

suku kedua dalam ruas kanan Persamaan (4.31) menjadi $\frac{1}{K_{AG}} = \frac{1}{K_{AG}}$. Dalam perpindahan massa

yang menyangkut system semacam ini, Tahanan dalam fasa gas yang menentukan. Sebaliknya untuk system gas yang sukar larut, seperti O_2 – air. Nilai m besar sekali, yang membuat tahanan dalam fasa gas kecil sekali dan dapat diabaikan. Karena itu dalam sistem semacam ini Tahanan fasa cair yang

menentukan. Dan Persamaan (4-32) dapat ditulis $\frac{1}{K_{AL}} = \frac{1}{K_{AL}}$

4. Penyebaran Konsentrasi

Penyebaran konsentrasi dapat dihitung dengan menggunakan persamaan kontinuitas yaitu Persmaan (4-34). Untuk itu persamaan ini harus dijabarkan lebih lanjut, Persamaan (4-34) dalam bentuk singkat adalah

$$\frac{\partial c_A}{\partial t} + \nabla \cdot N_A = R_A \quad (4-34)$$

Dari Persamaan (4-34) dapat diturunkan bentuk umum

$$\begin{aligned} (V_A - V)C_A &= -D_{AB} \nabla C_A \\ N_A &= v_A C_A = v C_A - D_{AB} \nabla C_A \end{aligned} \quad (4-35)$$

Substitusi Persamaan (4-35) ke dalam Persamaan (4-34) sehingga

$$\frac{\partial c_A}{\partial t} + (V \cdot v C_A) - (v \cdot D_{AB} \nabla C_A) = R_A \quad (4-36)$$

Jika density massa dan density molar. Begitu juga koefisien difusi. Dianggap tetap. Maka persamaan (4-34) dapat diubah menjadi

$$\frac{\partial c_A}{\partial t} + v \cdot \nabla C_A - D_{AB} \nabla^2 C_A = R_A \quad (4-37)$$

Perlu diingat bahwa $(\nabla \cdot v) = 0$ untuk fluida yang tak termampatkan (p tetap). Akhirnya didapat untuk system koordinat tegak lurus

$$\frac{\partial c_A}{\partial t} + v_x \frac{\partial c_A}{\partial x} + v_y \frac{\partial c_A}{\partial y} + v_z \frac{\partial c_A}{\partial z} = D_{AB} \left(\frac{\partial^2 c_A}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 c_A}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 c_A}{\partial z^2} \right) + R_A \quad (4-38)$$

Untuk sistem koordinat silinder

$$\frac{\partial c_A}{\partial t} + \left(v_r \frac{\partial c_A}{\partial r} + v_\theta \frac{\partial c_A}{\partial \theta} + v_z \frac{\partial c_A}{\partial z} \right) = D_{AB} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial c_A}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 c_A}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 c_A}{\partial z^2} \right) + R_A \quad (4-39)$$

Untuk sistem koordinat bola

$$\frac{\partial c_A}{\partial t} + \left(v_r \frac{\partial c_A}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial c_A}{\partial \theta} + \frac{v_\phi}{r \sin \theta} \frac{\partial c_A}{\partial \phi} \right) = D_{AB} \left(\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial c_A}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial c_A}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 c_A}{\partial \phi^2} \right) + R_A \quad (4-40)$$

40)

Persamaan (4-36) (4-37) dan (4-38) adalah bentuk-bentuk persamaan kontinuitas untuk penyusun A, yang dapat digunakan untuk mencari penyebaran konsentrasi. Jika diterapkan terhadap difusi searah yang mantap melalui fluida yang diam, tnpa reaksi kimia, maka Persamaan (4-36) menjadi

$$D_{AB} \frac{d^2 c_A}{dx^2} = 0 \quad (4-41)$$

Ini adalah keadaan perpindahan massa yang sederhana. Jika diintegrasikan dan digunakan syarat batas

Syarat batas 1 : pada $x = 0 \rightarrow c_A = c_{AO}$

Syarat batas 2 : pada $x = \delta_c \rightarrow c_A = c_{A1}$

Diperoleh penyebaran konsentrasi

$$\frac{c_A - c_{A1}}{c_{Ao} - c_{A1}} = 1 - \frac{x}{\delta_c} \quad (4-42)$$

Jika ingin dihitung k_A dalam sistem ini, maka dari Persamaan (4-35) dan (4-41) diperoleh

$$N_A = k_A (c_{AO} - c_{A1}) = - D_{AB} \left. \frac{dc_A}{dx} \right|_{x=0} \quad (4-43)$$

Jadi harga K_A dapat dihitung dari persamaan

$$K_A = \frac{D_{AB}}{\delta_c}$$

Yang seterusnya memberikan

$$Sh = \frac{k_A d}{D_{AB}} = \frac{d}{\delta_c} \quad (4-44)$$

Jika Persamaan (4-38) diterapkan terhadap difusi yang serupa di sekitar suatu permukaan yang berbentuk bola, maka diperoleh

$$Sh = 2 \quad (4-45)$$

Penerapan persamaan energi terhadap konduksi panas sekitar sebuah bola memberikan persamaan yang mirip, yaitu

$$Nu = 2 \quad (4-46)$$

4.1. Difusi secara tak mantap

Jika persamaan kontinuitas untuk zat A Persamaan (4-36) dibandingkan dengan persamaan energi pada Persamaan (4-21) dalam sistem koordinat tegak lurus untuk fluida yang tak termampatkan

$$\frac{\partial c_A}{\partial t} + v_x \frac{\partial c_A}{\partial x} + v_y \frac{\partial c_A}{\partial y} + v_z \frac{\partial c_A}{\partial z} = D_{AB} \left(\frac{\partial^2 c_A}{\partial x^2} + \right)$$

Maka terlihat adanya kemiripan. Persamaan (4-36) dapat diubah dari Persamaan (4-21) dengan membuat pergantian perubah yang berikut

$$\begin{aligned} \rho C_p T &\rightarrow C_A \\ \alpha &= \frac{k}{\rho C_p} \rightarrow D_{AB} \\ q_H &\rightarrow R_A \end{aligned}$$

Berdasarkan kemiripan ini difusi secara tekanan dapat dibahas dengan cara analogi dengan masalah konduksi secara tak mantap. Hasil penyelesaian yang telah diperoleh untuk konduksi tak mantap akan diterima sebagai penyelesaian difusi tak mantap yang sesuai sistemnya, dengan mengadakan pergantian perubahan berikut

$$\rho C_p T_0 \rightarrow \rho C_p T_1 \rightarrow C_{Aa}$$

perlu, diingat bahwa permukaan antar fasa dalam hal ini difusi harus dianggap tetap tidak bergerak, seperti pada konduksi panas. Dalam contoh-contoh dibawah ini fluida I, yang dimisalkan cairan, semula mempunyai konsentrasi merata c_{AO} , pada $t = 0$ konsentrasi pada permukaan berubah menjadi c_{Aa}

difusi dalam lempeng diperoleh persamaan diferensial

$$\frac{\partial c}{\partial t} = D_{AB} \frac{\partial^2 C}{\partial y^2} \quad (4-47)$$

Dengan syarat-syarat batas :

Syarat awal : pada $t < 0$, $c_A = c_{AO}$ (untuk semua y)

Syarat batas I : pada $y = 0$, $c_A = c_{Aa}$ ($t > 0$)

Syarat batas 2 : pada $y = \infty$, $c_A = c_{AO}$ ($t > 0$)

Lihat Persamaan (4-47) dengan syarat batasnya hasil penyelesaiannya menjadi

$$\frac{c_A - c_{AO}}{c_{Aa} - c_{AO}} = 1 - \operatorname{erf}\left(\frac{y}{\sqrt{4 D_{AB} t}}\right) \quad (4-48)$$

kalau hendak dihitung koefisien pindah massa k_A ditempuh cara berikut

$$\begin{aligned} N_A &= -D_{AB} \left. \frac{dc_A}{dy} \right|_{y=0} \\ &= + D_{AB} \cdot \sqrt{\frac{1}{D_{AB} t}} (c_{Aa} - c_{AO}) \\ &= \sqrt{\frac{D_{AB}}{\pi t}} \cdot (c_{Aa} - c_{AO}) \end{aligned} \quad (4-49)$$

Dari Persamaan (7-49) didapat

$$k_A = \sqrt{\frac{D_{AB}}{\pi t}} \quad (4-50)$$

Persamaan (4-50) dapat dipakai untuk menyelesaikan waktu penetrasi T_d , yang diperlukan untuk mencapai kedalaman tertentu dalam lempeng itu. Dari k_A , yang besarnya tergantung pada waktu, dapat dihitung nilai rata-ratanya

$$\langle k_A \rangle = \frac{1}{td} \int_0^{td} \sqrt{\frac{D_{AB}}{\pi t}} dt = 2 \sqrt{\frac{D_{AB}}{\pi t_d}} \quad (4-51)$$

Jika dari Persamaan (4-45) digambar grafiknya, maka ternyata bahwa grafik komplemen fungsi kesalahan ini pada awalnya lurus. Kalau dibuat garis singgung pada titik awalnya ($y = 0$) dan dihitung tangens sudut arah garis singgung itu, diperoleh

$$\left. \frac{dc_A}{dy} \right|_{y=0} = -\frac{c_{Aa} - c_{Ao}}{\sqrt{4 D_{AB} t}} = \frac{C_{Aa} - C_{Ao}}{0 - \sqrt{4 D_{AB} t}} \quad (4-52)$$

Seperti yang telah digunakan untuk Persamaan (4-46), Persamaan (4-49) memperlihatkan, bahwa garis singgung itu memotong garis absis pada titik ($\sqrt{4 D_{AB} t} \cdot C_{Ao}$) jarak $y =$ adalah jarak yang dicapai oleh difusi itu selama waktu t . Kalau seluruh difusi berlangsung maka jarak penetrasi adalah

$$y = \sqrt{4 D_{AB} t} \quad (4-53)$$

Karena kecilnya nilai D_{AB} dan pendeknya waktu kontak, maka biasanya jarak penetrasi itu kecil sekali. Jika jarak penetrasi ini lebih kecil dari pada separuh ukuran "benda" yang terkecil ($-1/2 d$), benda tadi dapat dianggap sebagai benda yang setengah takhingga, dan uraian di atas berlaku juga dalam hal ini.

Jadi syarat untuk sifat setengah tak terhingga itu adalah

$$\sqrt{\pi D_{AB} t} < 1/2d$$

Yang sering ditulis dengan bilangan Fourier, Fo adalah

$$Fo = \frac{D_{AB} t}{d^2} \ll 0,1 \quad (4-54)$$

atau

$$Fo = 0,05$$

Fo mengandung arti

$$Fo = \left(\frac{\text{jarak penetrasi}}{\text{tebal bahan}} \right)^2$$

$T =$ waktu kontak

Untuk waktu kontak yang pendek dan terutama dalam hal permukaan antar fasa itu selalu diperbaharui karena ada aliran. Lebih baik dipakai teori penetrasi dari pada teori dua lapisan untuk menerangkan mekanisme kejadian difusi. Persamaan (4-54) memang juga dapat diturunkan berdasarkan teori penetrasi. Teori penetrasi tidak akan dibahas disini.

Berdasarkan kemiripan itu, maka perpindahan massa dengan kartu kontak yang pendek, dapat dihitung dengan menggunakan nomogram atau persamaan konduksi takmantap yang sesuai sifat tak mantapnya difusi dapat dilihat dari apakah dipenuhi $Fo < 0,05$.

4.2. Perpindahan Massa Secara Konveksi

a) Analogi antara perpindahan massa dan panas

Perpindahan massa secara konveksi antara suatu permukaan dan suatu aliran, dapat diperlakukan dengan cara analisa yang sama dengan perpindahan panas secara konveksi paksa, asalkan campuran yang tersangkut encer dan tiada reaksi kimia. Pergantian perubah dilakukan sebagai berikut

$$\begin{aligned} \rho\sigma p T &\rightarrow c_A \\ a &\rightarrow D_{AB} \\ q_h &\rightarrow N_A \\ \frac{\quad}{\rho\sigma p} &\rightarrow k_A \end{aligned}$$

Apalagi ini dapat dilanjutkan untuk penggunaan persamaan-persamaan tanpa dimensi perpindahan perpindahan panas untuk perhitungan perpindahan massa dengan susunan geometri yang sama. Dengan memakai pergantian

$$Sg = \frac{p}{\rho D} = \frac{v}{D}$$

Bilangan Schmidt Sc merupakan perbandingan antara tebal lapisan hidrodinamis dan lapisan batas konsentrasi. Nilai Sc untuk gas berkisar sekitar 1 dan tidak begitu dipengaruhi oleh temperatur. Untuk cairan nilai Sc berkisar antara 100-1000 dan cepat mengecil jika temperatur naik.

Bilangan-bilangan tanpa dimensi dibawah ini digunakan baik untuk perpindahan panas maupun perpindahan massa

Re, Gr dan Fo

$$Gz = \frac{ax}{\langle v \rangle d^2} = \text{bilangan Graetz}$$

Dalam penggunaan hasil analisa perpindahan panas untuk perpindahan massa, harus diperiksa dengan teliti apakah perpindahan massa itu seluruhnya berjalan mirip dengan perpindahan panas. Untuk dapat melakukan pergantian perubahan maka batas-batas nilai Re untuk berlakunya persamaan itu harus sama. Begitu juga batas – batas nilai Sc harus sama dengan batas-batas nilai Sc harus sama dengan batas-batas nilai Pr. Untuk perpindahan massa dalam fasa gas pergantian perubah itu sering dapt dilakukan, karena $Sc = Pr$. Untuk perpindahan massa dalam fasa cair $Sc \gg Pr$. Salah satu persoalan semacam itu ialah perpindahan massa antara permukaan padat dan aliran bergolak untuk $2 \cdot 10^3 < Re < 10^5$, dalam pipa.

$$Nu = 0,026 (Re)^{0,8} (Pr)^{1/3} \quad (6.87)$$

$$Sh = 0,026 (Re)^{0,8} (Sc) \quad (7.52)$$

Contoh lain kemiripan antara konduksi panas dan difusi sekitar sebuah permukaan berbentuk bola. Jika tiada aliran, telah dijumpai lebih dulu.

$$Nu = 2 \quad (4-55)$$

$$Sh = 2 \quad (4-56)$$

Jika ada aliran sekitar bola itu adalah

$$Nu = 2 + 0,60 Re^{1/2} Pr^{1/3} \quad (4-57)$$

$$Sh = 2 + 0,60 Re^{1/2} Sc^{1/3} \quad (4-58)$$

Contoh-contoh diatas dapat diperluas dengan beberapa lagi yang dapat dicari dalam pustaka. Dalam hal keadaan perpindahan panas tidak mirip benar dengan perpindahan massa yang bersangkutan, maka sekurang-kurangnya persamaan dimensi perpindahan panas itu dapat dipakai untuk memperkirakan besarnya koefisien pindah massa.

Seperti yang diperlukan oleh contoh-contoh persamaan di atas. Perhitungan berdasarkan analogi dapat dipakai juga untuk menghitung koefisien pindah massa rata-rata dengan menggunakan data percobaan pindah panas dan sebaliknya. Jika nilai Re tidak terlalu rendah. Persamaan-persamaan dari jenis yang berikut dapat digunakan untuk perhitungan koefisien perpindahan dalam susunan geometri yang sama.

$$Nu = C Re^m Pr^n$$

$$Sh = C Re^m Sc^n$$

Nilai m berubah dari 1/3 (untuk aliran berlapis dalam pipa), 0,5 (untuk aliran sekitar bola) sampai 0,8 (untuk aliran bergolak dalam pipa). Nilai n biasanya agak tetap dan berkisar sekitar 1/3. Kemiripan ini telah digunakan oleh Chilton dan Colburn untuk untuk mengembangkan cara penyajian yang lebih menonjolkan analogi. Telah didefinisikan suatu besaran panda panas J_H dan suatu besaran pindah massa J_D yang berikut

$$J_H = Nu Re^{-1} Pr^{-1/3} \quad (4-59)$$

$$J_D = Sh Re^{-1} Sc^{-1/3} \quad (4-60)$$

Dengan kedua besaran diatas, analogi antara perpindahan panas dan massa untuk susunan geometri yang satu dan nilai Be yang tidak terlalu rendah, dapat ditulis

$$J_H = J_D = C Re^{m-1} \quad (4-61)$$

Untuk aliran bergolak dalam pipa dan aliran melewati lempeng datar dapat ditulis pula

$$J_H = J_D = \frac{1}{2} f \quad (4-62)$$

Dimana f ialah factor gesekan Fanning.

b. Perpindahan massa sekitar bola

1. Fluida Diam

Sebagai contoh akan ditinjau perpindahan massa sekitar permukaan yang berbentuk bola. Masalah perpindahan massa perpindahan massa sekitar suatu bola dalam fluida yang diam sudah dibahas lebih dahulu secara analogi. Persamaan neraca massa dalam hal ini menjadi

$$\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left(r^2 N_{Ar} \right) = 0 \quad (4-63)$$

Integrasi dua kali dan penggunaan syarat batas :

Syarat batas 1 : pada $r = R$ $c_A = c_{Aa}$

Syarat Batas 2 : pada $r = \infty \rightarrow c_A = c_{A(\infty)}$

Memberikan penyebaran konsentrasi A, c_A untuk

$$N_A + N_B = 0, N_A = -D_{AB} \frac{dc_A}{dr} \frac{c_A - c_{A(\infty)}}{c_{Aa} - c_{A(\infty)}} = \frac{R}{r} \quad (4-64)$$

sehingga

$$N_A = \frac{D_{AB}}{R} (c_{Aa} - c_{A(\infty)})$$

dan

$$k_A = \frac{D_{AB}}{R} \rightarrow Sh = 2$$

untuk

$$N_B = 0, N_A = -D_{AB} \frac{c}{c - c_A} \frac{dc_A}{dr}$$

$$\frac{c - c_A}{c - c_{A(\infty)}} = \left(\frac{c - c_{Aa}}{c - c_{A(\infty)}} \right)^{\frac{R}{r}} \quad (4-65)$$

Sehingga dengan penyederhanaannya adalah

$$\ln \frac{c - c_{Aa}}{c - c_A} = \frac{c_{Aa} - c_{A(\infty)}}{c}$$

didapat juga

$$N_A = \frac{D_{AB}}{R} (c_{Aa} - c_{A(\infty)}) \text{ dan } Sh = 2$$

Coba lakukan sendiri integrasi untuk memperoleh Persamaan (4-64) dan (4-65).

2. Fluida mengalir

Jika ada aliran fluida sekitar bola, dan jika diketahui keadaan mantap, tiada rotasi $\Phi = 0$, dan tiada reaksi kimia, maka untuk $N_A = -D_{AB} \frac{dc_A}{dr}$ diperoleh persamaan neraca massa penyusun A

$$v \frac{\partial c_A}{\partial r} = D_{AB} \left(\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial}{\partial r} \right) \right) \quad (4-66)$$

Untuk aliran berlapis disekitar bola, $v_r = 0$, dan Persamaan (4-66) menjadi

$$D_{AB} \frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{dc_A}{dr} \right) = 0 \quad (4-67)$$

Persamaan (4-67) adalah sama dengan Persamaan (4-63), sehingga hasil analisa ini juga sama dengan Persamaan (4-64) dan seterusnya. Sebab kesamaan ini karena dianggap, bahwa $v \Theta$ tidak menimbulkan gradient konsentrasi $\frac{dc_A}{d\Theta}$, atau tidak ada difusi kearah (bilamana anggapan ini diambil)

Dalam hal ini fluksi A tidak dihitung secara analisa, karena akan didapat lagi $k_A = \frac{D_{AB}}{R}$, nilai k_A dihitung dari persamaan (4-58) dan kemudian disubstitusikan kedalam persamaan

$$N_A = k_A (c_{Aa} - c_{A(\infty)}) \quad (4-68)$$

Hal yang terakhir ini memperlihatkan, bahwa jika analisa matematika tidak memberikan hasil yang diinginkan, kita terpaksa menggunakan persamaan empiris.

Jika dalam aliran berlapis

$$N_B = 0$$

dan

$$N_A = -D_{AB} \frac{c}{c - c_A} \frac{dc_A}{dr}$$

akan diperoleh persamaan neraca massa penyusun A yang berikut

$$\frac{D_{AB}}{r^2} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{dc_A}{dr} \right) = 0 \quad (4-69)$$

Dengan syarat batas

- 1) pada $r = R = c_A = c_{Aa}$
- 2) pada $r = \infty \rightarrow c_A = c_{A(\infty)}$

Persamaan (4-69) akan memberikan penyebaran c_A seperti dalam masalah fluida yang diam

$$\frac{c - c_A}{c - c_{A(\infty)}} = \left(\frac{c - c_{Aa}}{c - c_{A(\infty)}} \right) \left(\frac{R}{r} \right) \quad (4-70)$$

Juga disini diperhitungkan fluksi A dilakukan dengan mengambil nilai k_A dari persamaan (4-58). Untuk melihat apakah difusi sekitar bola itu maka harus dihitung F_0 . Untuk t diambil waktu yang diperlukan untuk melewati $1x$ diameter bola. Selain soal-soal tersebut diatas, keadaan perpindahan massa selalu menjadi lebih rumit, yang penyelesaiannya secara analisa menjadi lebih sukar. Keadaan-keadaan yang disebut dibawah ini yang sering dijumpai dalam perpindahan massa sekitar bentuk bola, menyebabkan bertambahnya kerumitan itu

- Selain kearah r , juga ada gradient konsentrasi kearah Θ
- Dalam aliran bergolak ada kecepatan v_o dan 'r'

- Kecepatan yang lebih besar menimbulkan riak pada permukaan “bola”, sehingga luas permukaan sulit diperkirakan.
- Permukaan mengalami perputaran (rotasi), jadi ada v_{θ}
- Koefisien difusi bertambah besar karena perubahan kecepatan
- Kecepatan yang makin besar merubah bentuk bola menjadi gepeng, setengah bola, mangkok terbalik, dan seterusnya.

Semua keadaan diatas membuat penyelesaian soal perpindahan massa menjadi sukar, dan tidak dapat dilakukan dengan analisa semata-mata.

CONTOH SOAL

Penguapan tetes yang jatuh secara bebas. Suatu tetes air, yang berbentuk bola dengan diameter 1,0 mm, sedang jatuh dengan kecepatan akhir 200 cm/detik melalui udara kering dan diam pada tekanan 1 atmosfer. Temperatur permukaan tetes adalah 20°C dan temperatur udara 30°C. Tekanan uap air pada 20°C adalah 0,0231 atm. Perkirakan laju penguapan dengan mengangap keadaan mantap.

ANALISA

Campuran uap air dan udara dianggap campuran dua penyusunan (A = air, B = udara). Kelarutan udara dalam air sangat kecil dan dapat diabaikan. Sehingga $N_B = 0$, jika dianggap pula. Bahwa konsentrasi uap air dalam udara itu kecil sekali, maka sifat-sifat fisis udara tidak akan dipengaruhi oleh adanya uap air.

RENCANA

Penyebaran konsentrasi A dapat diperkirakan seperti yang dinyatakan oleh Persamaan (7.61) dan koefisien pindah massa dapat dihitung dari Persamaan (7.54) semua besaran harus dinyatakan sesuai dengan persamaan fluksi yang akan dipakai, yaitu

$$N_A = k_{Ag} (p_{Aa} - p_A(\infty)) \quad (4-71)$$

PENYELESAIAN

Persamaan (4-58) harus dinilai pada temperatur lapisan batas. Ketentuan-ketentuan yang sudah diketahui adalah

$$T_a = 20^\circ\text{C} \quad \rightarrow P_{Aa} = 0,0231 \text{ atm}$$

$$T_{\infty} = 30^\circ\text{C} \quad \rightarrow P_{A\infty} = 0,0 \text{ atm}$$

$$T_1 = \frac{20 + 30}{2} = 25^\circ\text{C}$$

Untuk substitusi ke dalam Persamaan (4-58) telah diperoleh keterangan dari pustaka sebagai berikut :

Sifat-sifat fisis udara pada 25°C

$$\rho = 1,18 \text{ kgm}^{-3}$$

$$\mu = 1,837 \cdot 10^{-5} \text{ N det m}^{-1}$$

$$\nu = 1,552 \cdot 10^{-5} \text{ m}^2 \text{ det}^{-1}$$

$$D_{AB} = 2,58 \cdot 10^{-5} \text{ m}^2 \text{ det}^{-1}$$

Substitusi memberikan :

$$Re = \frac{\rho v \mu}{\mu} = \frac{2,1 \cdot 10^{-3}}{1,5552 \cdot 10^{-5}} = 1,29 \cdot 10^2$$

$$Sc = \frac{\mu}{D_{AB}} = \frac{1,5552 \cdot 10^{-5}}{2 \cdot 58 \cdot 10^{-5}} = 0,60$$

$$k_A = \frac{Sh D_{AB}}{d} = \frac{2,58 \cdot 10^{-3}}{1 \cdot 10^{-3}} (2 + 0,60(129))^{1/2} (0,60)^{1/3} = 0,20 m \det^{-1}$$

$$R = 8,2 \cdot 10^{-3} m^3 atm mol^{-1} K^{-1}$$

$$k_{Ag} = \frac{k_A}{RT} = \frac{0,20}{8,2 \cdot 10^{-5} \cdot 298} = 8,18 mol \det^{-1} m^{-2} atm^{-1}$$

$$N_A = 8,18(0,0231 - 0,0) = 0,1890 mol \det^{-1} m^{-2}$$

$$\text{laju penguapan} = N_A d^2 = 0,1890 \cdot \pi \cdot 1 \cdot 10^{-6}$$

$$= 5,94 \cdot 10^{-7} mol \det^{-1}$$

5. Perpindahan Panas dan Massa secara Bersamaan

Perpindahan massa dari satu fasa ke dalam fasa yang lain selalu diikuti oleh sejumlah panas. Misalnya jika suatu gas melarut dalam cairan, akan dilepaskan panas pelarutan. Juga jika cairan berubah menjadi uap akan diperlukan panas penguapan. Jika terjadi reaksi kimia akan ditimbulkan atau diserap panas reaksi. Terjadilah perubahan panas itu akan berakibat pada temperatur permukaan antar fase akan mempengaruhi umpamanya kecepatan absorpsi gas kedalam cairan, karena kelarutan itu tergantung pada perpindahan panas dan massa bergantung satu pada yang lain. Jika sudah tercapai keadaan mantap perubahan perubahan panas akan sasm besar dengan jumlah panas yang timbul atau diserap pada perpindahan massa. Dua operasi teknik kimia termasuk jenis kejadian ini ialah :

PENGERTIAN DAN HUMIDIFIKASI-

a. Pengeringan

Dalam pengeringan biasanya padatan yang basah diberi aliran udara, yang tidak jenuh dengan uap air. Karena udara itu belum jenuh, maka akan terjadi penguapan cairan dari permukaan cairan-gas. Untuk penguapan itu diperlukan panas penguapan, yang diambil dari cairan itu sendiri, sehingga temperatur cairan turun. Penurunan temperatur cairan memperbesar selisih temperatur antara cairan dan gas, dan akan memperbesar pula panas yang dipindahkan. Akhirnya akan tercapai keadaan mantap, yang akan mengakibatkan semua temperatur menjadi tetap dan tidak ada lagi perubahan entalpi terhadap waktu. Dalam hal ini seluruh panas yang diperlukan untuk penguapan diberikan oleh fasa gas dan laju penguapan tetap. Maka berlaku neraca energi sebagai berikut

$$q = N_A \lambda_A \quad (4-72)$$

dimana λ_A = panas penguapan 1 mol. A pada temperatur permukaan T_a untuk perpindahan panas antara cairan dan gas, jika $T_g = T_a$ dan udara dianggap tidak mendifusi, ditulis

$$q = h (T_g - T_a) \quad (4-73)$$

untuk perpindahan massa dapat ditulis

$$N_A = k_{Ag} (p_{Aa} - p_{Ag}) \quad (4-74)$$

dimana

$$k_{Ag} = \frac{k_A}{RT_m}$$

dan

$$T_m = \frac{1}{29}(T_a + T_g)$$

Kalau Persamaan (4-73) dan (4-74) disubstitusikan ke dalam Persamaan (4-63), diperoleh

$$\frac{h}{k_{Ag} \cdot \lambda \cdot A} (T_g - T_a) = (P_{Aa} - P_{Ag}) \quad (4-75)$$

dimana P_{Aa} adalah tekanan uap zat A pada temperatur T_a . Pada pengeringan keadaan mantap akan berlangsung terus, selama masih terdapat air yang terikat. yaitu jumlah air yang mempunyai tekanan uap yang sama dengan tekanan uap murni. Selama tahap ini laju pengeringan, yaitu banyaknya air yang teruapkan persatuan waktu, persatuan luas, akan tetap pula.

Jika pengeringan dilanjutkan, pada sesuatu saat laju pengeringan akan berkurang, yaitu kalau air yang terikat mempunyai tekanan uap kesetimbangan kurang dari tekanan uap jenuh, dan besarnya tekanan uap itu tergantung pada kadar air padatan pada temperatur padatan, berdasarkan kurva kesetimbangan kelembaban adalah

$$P_A^* = f(x) \quad (4-76)$$

dimana

P_A^* = tekanan uap kesetimbangan

X = kadar air, gram air/gram padatan kering.

Pengeringan dalam tahap ini mengalami laju pengeringan yang megurang. Air yang menguap dalam hal ini mengurangi kadar air padatan. Dan hal ini menurunkan pula tekanan uap kesetimbangan, yang selanjutnya memperkecil fluksi uap air yang pindah ke fasa gas.

Menurunnya banyaknya air yang menguap disebabkan karena makin lamanya waktu yang diperlukan air untuk berdifusi melalui pori-pori padatan. Dari lapisan yang makin dalam. Hal ini akan berlangsung terus sampai besarnya kadar air kesetimbangan sesuai dengan kelembaban nisbi udara yang melewati permukaan. Disini laju pengeringan menjadi nol.

Jika dalam pengeringan itu induksi uap air kecil, sehingga P_{Ag} dan T_g boleh dianggap tidak begitu berubah, maka dalam Persamaan (4-75) perbandingan h/K_{Ag} dapat diganti dengan perbandingan nilai rata-rata masing-masing koefisien meliputi seluruh luas permukaan, $\langle h \rangle / \langle K_{Ag} \rangle$. Nilai perbandingan yang terakhir dapat dihitung berdasarkan analogi antara perpindahan panas dan massa, karena keduanya berlaku untuk sistem geometri yang sama dan keadaan aliran yang sama. Kalau Persamaan (4-87) dibagi oleh Persamaan (4-52) akan diperoleh

$$\frac{\langle h \rangle}{\langle k_A \rangle} = \rho C_p \left(\frac{k}{\rho C_p D} \right)^{2/3} \quad \text{atau} \quad \frac{\langle h \rangle}{\langle k_{Ag} \rangle} = \rho C_p (Le)^{2/3} \quad (4-77)$$

dimana

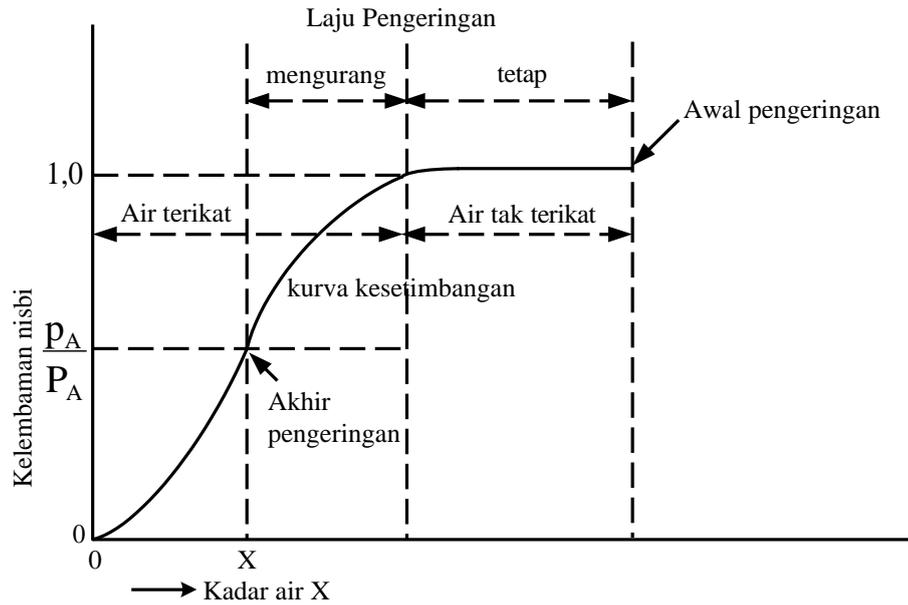
$$Le = \text{bilangan lewis} = \frac{\alpha}{D} = \frac{k}{\rho C_p D} = \frac{Sc}{Pr}$$

$$R = 8,31 \cdot 10^{-5} \text{ m}^3 \text{ atm mol}^{-1} \text{ K}^{-1}$$

$$= 8,31 \cdot 10^3 \text{ J.kmol}^{-1}\text{K}^{-1}$$

$$T_m = \frac{1}{2} (T_g + T_a)$$

Dan semua sifat fisis dinilai pada T_m . Grafik pengeringan biasanya digambarkan sesuai dengan kesetimbangan pada Persamaan (4-67) antara tekanan parsial uap air dalam udara, yang dinyatakan sebagai kelembaban nisbi P_a/P_A , dan kadar air dalam padatan X, seperti pada Gambar 4.6.



Gambar 4.6. Grafik Pengeringan

b. Temperatur bola-basah dan bola kering

Pengaruh pendinginan cairan terdapat pada peristiwa lain. Dua buah thermometer dialiri udara yang sama seperti pada Gambar 4.7. Aliran udara ini sudah mengandung uap air, tetapi tidak jenuh. Sebuah thermometer diselubungi sehelai perca basah, yang selalu berhubungan dengan tempat persediaan air. Air baru akan terus mengalir dengan gaya kapilar dan membuat perca itu selalu basah. Dari keadaan ini dapat diturunkan persamaan antara komposisi udara dan kedua temperatur thermometer itu.

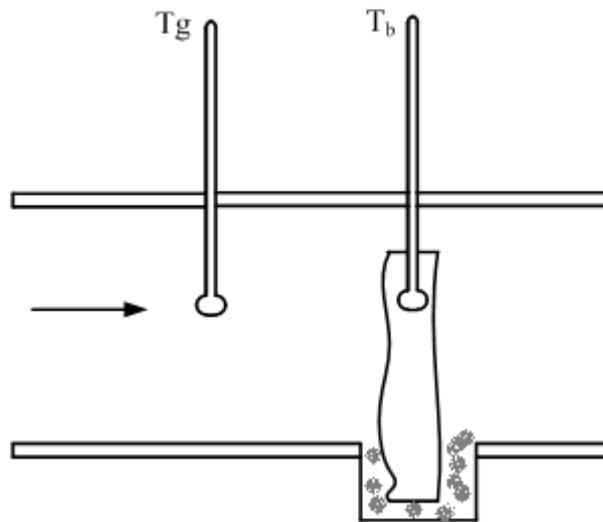
Jika temperatur air semula sama dengan udara, maka oleh penguapan temperatur air akan turun, dan akhirnya akan mencapai temperatur yang tetap, pada massa panas yang diperlukan penguapan tepat diimbangi oleh panas yang dipindahkan secara konveksi dari udara ke permukaan air (perca basah) thermometer yang diselubungi akan menunjukkan temperatur kesetimbangan ini (yang disebut temperatur bola-basah) dan thermometer yang tidak diselubungi disebut temperatur bola kering. Dalam hal ini berlaku neraca massa sebagai berikut

$$N_A = \pi \, dL \cdot (T_R - T_b) \tag{4-78}$$

$$K_{Ag} \cdot A (\rho_{Ab} - \rho_{Ag}) = h (T_R - T_b) \tag{4-79}$$

$$\frac{(P_{Ab} - P_{Ag})}{(T_g - T_b)} = \frac{h}{k_{Ag} P_A} \tag{4-80}$$

Persamaan (4-70) sama dengan Persamaan (4-66) digunakan untuk menentukan P_{Ag} . Jika P_{Ab} adalah tekanan uap air jenuh pada T_b , secara mudah penentuan kelembaban udara secara ini dapat dilakukan dengan dengan diagram kelembaban udara-air.



Gambar 4.7. Temperatur bola-basah dan bola-kering.

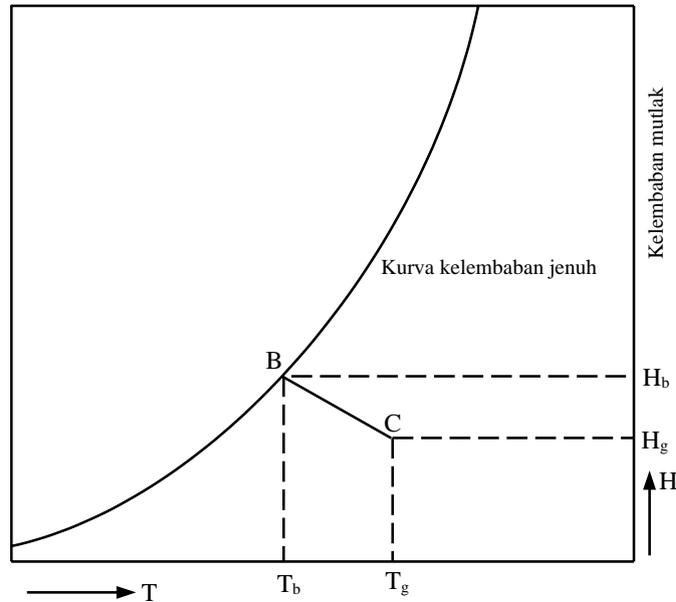
Jika P_{Ab} atau P_{Aa} dianggap kecil bila dibandingkan dengan tekanan total. Maka dalam Persamaan (4-70) dan (4-66) dapat diadakan anggapan, bahwa sifat udara tidak berubah dan untuk perhitungan h/k_{Ag} dapat digunakan sifat-sifat udara murni. Dengan anggapan ini Persamaan (4-70) dapat digambar grafiknya dengan mudah, dengan mengambil temperatur T sebagai absis, menurut persamaan yang disederhanakan :

$$P_{Ab} - P_{Ag} = -\frac{h}{k_{Ag} \lambda_A} (T_b - T_g) \quad (4-81)$$

Persamaan (4-70) adalah persamaan garis lurus dengan kemiringan $-\frac{h}{k_{Ag} \lambda_A}$, yang melalui titik-titik (T_b, P_{Ab}) dan (T_g, P_{Ag}) . Karena selalu $P_{Ab} > P_{Ag}$ dan $T_g > T_b$, maka kemiringan itu selalu negatif.

Untuk memudahkan pemakaian, maka dalam teknik kimia Persamaan (4-70) diubah sehingga tekanan parsial dinyatakan sebagai kelembaban mutlak, yaitu gram uap air per gram udara kering, H.

$$(H_b - H_g) = - (\text{Tetapan}) (T_b - T_g) \quad (4-82)$$



Gambar 4.8. Diagram kelembaban udara-air (disederhanakan).

Penggunaan Persamaan (4-71) dilakukan dengan diagram kelembaban udara-air. Dalam suatu operasi teknik kimia yang dinamakan humidifikasi. Dalam humidifikasi udara dan air dihubungkan dengan maksud mencapai salah satu dari dua tujuan di bawah ini :

- Memberi kelembaban tertentu kepada udara untuk keperluan proses atau ruangan (alat pengatur udara).
- Mendinginkan air dalam jumlah yang banyak (menara pendingin dalam pabrik).

Gambar 4.8. menggambarkan diagram kelembaban udara-air yang disederhanakan. Garis-garis yang tidak tersangkut dalam pembicaraan dibawah ini, sengaja dihilangkan, karena dalam operasi teknik kimia diagram ini akan dipelajari lebih mendalam. Umpamakan, bahwa udara ingin dijenuhkan dengan uap air. Untuk itu udara dihubungkan dengan tetes-tetes air selama waktu tertentu. Keadaan udara semula dinyatakan dengan titik G pada Gambar 4.8 yaitu kelembaban H_g , temperatur T_g . Sewaktu sudah jenuh keadaan udara dinyatakan dengan titik B (kelembaban H_b , temperatur T_b). Garis BG menyatakan jalannya operasi penjenuhan itu Persamaan (4-71) adalah persamaan untuk garis BG. Keadaan udara yang dicapai pada titik B adalah sama dengan keadaan sekitar perca basah pada thermometer bola-basah. Kedua keadaan itu jenuh, dengan tekanan total yang sama, yaitu tekanan udara. Untuk memudahkan penentuan kelembaban udara, maka dalam diagram kelembaban dibuat banyak garis-garis semacam BG, untuk memungkinkan interpolasi dengan mudah. Garis-garis itu hamper sejajar satu dengan yang lain.

RINGKASAN DAN SOAL-SOAL

Difusi :

$$\frac{\partial c_A}{\partial t} + v \cdot N_A = R_A$$

$$N_{AX} = -D_{AB} \frac{dC_A}{dx}$$

Analogi :

Perpindahan massa molecular :

$$N_{AX} + N_{BX} = 0 \rightarrow N_A = \dots ?$$

$$N_{BX} = 0 \rightarrow N_A = \dots ?$$

Perpindahan massa konveksi :

$$N_A = K_{Ag} (P_{Ag}^* - P_{Ag})$$

Teori dua lapisan.

Persamaan kontinuitas untuk A :

$$\frac{D_{CA}}{Dt} = D_{AB} v^2 c_A + R_A$$

Analogi perpindahan massa – panas

Difusi takmantap – konduksi takmantap

Konveksi massa – konveksi paksa

Perpindahan panas dan massa

Pengeringan : mekanisme

Humidifikasi : temperatur bola basa, temperatur bola kering, diagram kelembaban.

SOAL-SOAL :

1. Jika konsentrasi dinyatakan sebagai fraksi mol, tuliskan lagi persamaan (4-13) untuk cairan.
2. Carilah penyebaran konsentrasi dalam fasa cair, gas NH_3 yang mendifusi ke dalam air. NH_3 berada dalam campuran dengan udara. Air yang tidak mengalir mendadak berhubungan dengan campuran NH_3 -udara. Lakukan baik dengan analisa, maupun analogi.

Jawab : $c/c^* = \text{erfc } y / \sqrt{4Dt}$, dalam mana

C = konsentrasi NH_3 dalam air

C^* = konsentrasi NH_3 dalam air yang setimbang dengan tekanan parsial NH_3 dalam udara.

D = koefisien difusi $\text{NH}_3 - \text{H}_2\text{O}$ dalam cairan.

3. Sebuah biuret gas tertutup, telah diisi dengan gas murni dan cairan murni dalam jumlah volum yang sama. Mula-mula tekanannya 1 atmosfer dan temperaturnya temperatur kamar. Sesudah dikocok baik-baik tekanannya menjadi $2/3$ atmosfer pada temperatur yang tetap. Hitunglah koefisien penyebaran m gas itu dalam cairan.

$$\text{Jawab : } m = \frac{\text{konsentrasi dalam cairan}}{\text{konsentrasi dalam gas}} = 0,5$$

4. Air dalam sebuah kolam mempunyai temperatur sama dengan udara di atasnya. Pada permukaannya air itu sedang menguap dengan arah tegak lurus ke atas. Udara dianggap tidak dapat larut dalam air. Keadaan penguapan itu mantap, sehingga tepat di atas permukaan air, udara itu jenuh, dengan tekanan parsial uap air P_A^* , agak jauh dari permukaan air udara mengandung uap air dengan tekanan parsial P_o yang merata. Carilah penyebaran konsentrasi uap air dalam lapisan udara di atas permukaan air. Nyatakan konsentrasi itu dalam P_A , $A = \text{uap air}$.

Bagaimanakah dalam hal ini hubungan koefisien pindah massa k_{Ag} dengan koefisien difusi $D_{A\text{-udara}}$?

$$\text{Jawab : } \frac{P_A - P_A^*}{P_O - P_A^*} = \frac{z}{\delta}; k_{Ag} = \frac{P}{(P - P_A)^6} D_{AB}$$

5. Dalam akuarium ikan hias dilarutkan udara kedalam air (27°C) dengan menghembuskan gelembung-gelembung udara (P= 1 atmosfer) ke dalamnya. Gelembung-gelembung naik dengan kecepatan yang cukup rendah, sehingga gerakan aliran air disekitar gelembung boleh dianggap berlapis. Kalau diameter rata-rata gelembung itu 1 mm, kecepatan naiknya 15cm³/menit, berapakah udara yang dapat larut dalam air per menit ? air akuarium semula sudah mengandung udara dengan konsentrasi 1 mol udara per sejuta mol air. Air dianggap tidak menguap ke dalam gelembung udara. Kedalaman air akuarium = 50 cm.

$$D_{AB}(\text{udara-air}), 27^\circ\text{C} = 2,8 \cdot 10^{-5} \text{ cm}^2\text{det.}$$

Persamaan kesetimbangan untuk kelarutan udara dalam air :

$$P(\text{atm}) = 7,7 \cdot 10^4 \times (\text{fraksi mol})$$

$$\text{Jawab : } 2,8 \cdot 10^{-5} \text{ mol menit}^{-1}$$

$$8 \cdot 10^4 \text{ gram menit}^{-1}$$

6. Dalam sebuah reactor, zat A dalam fasa gas mendifusi ke permukaan katalis, dimana terjadi reaksi dimerisasi. Buktikan, bahwa untuk fluksi mol A berlaku :

$$N_A = -D_A \frac{2c}{2c - c_A} \frac{dc_A}{dx}$$

7. sebuah pancaran air, berbentuk silinder, jatuh tegak lurus melewati gas CO₂ murni. Diameter pancaran 2 mm temperatur air 20°C, kecepatan air tetap dan merata sebesar 5m detik⁻¹. tekanan gas CO₂ 1 atmosfer. Kelarutan CO₂ dalam air (20°C, 1 atm) adalah 1,73 kgm⁻³. koefisien difusi D = 1,7.10⁻⁹m² detik⁻¹. berapa banyakkah CO₂ yang diserap per detik dalam 10 cm pertama pancaran ?

$$\text{Jawab : } 3,6 \cdot 10^{-7} \text{ kgdet}^{-1}$$

8. Sebuah bola naftalena (=kapur barus) dengan diameter 1 cm disimpan dalam udara diam. Hitunglah kecepatan penguapan (=sublimasi), kalau tekanan uap naftalena pada temperatur kamar diperkirakan 0,05 mm Hg. Sesudah disimpan berapa lama kapur barus itu diameternya berkurang menjadi separuhnya ?

$$D_{\text{NAFTALENA-UDARA}} = 0,7 \cdot 10^{-5} \text{ m}^2\text{det}^{-1}$$

$$\rho_{\text{naftalena}} = 1150 \text{ kg m}^{-3}$$

$$\text{Jawab : } G = 1,3 \cdot 10^{-10} \text{ kg det}^{-1} ; 2 \text{ bulan.}$$

9. Selama dipakai untuk mengalirkan larutan garam, pada dinding-dalam sebuah pipa telah terbentuk kerak padat setebal 2 mm. koefisien pindah panas dinding ini ialah 1000 Wm⁻²°C⁻¹. pipa tadi akan dibersihkan dari kerak dengan mengalirkan air suling dalam keadaan yang sama. Hitunglah waktu yang diperlukan untuk melarutkan garam, jika diketahui :

$$\rho_{\text{garam}} = 2500 \text{ kgm}^{-3}$$

$$\text{Le} = \frac{\alpha}{D} = 100$$

$$\text{Kelarutan garam} = 300 \text{ kg m}^{-3}$$

$$\text{Jawab : } 1520 \text{ detik} = 25,3 \text{ menit .}$$

10. Udara pada 25°C dan tekanan 1 atmosfer mempunyai kelembaban nisbi 80%. Berapakah temperatur bola-basahnya. Gunakan keterangan-keterangan dibawah ini :

T, °C	Tekanan, uap, P, 10 ³ Nm ⁻²	$\lambda \cdot 10^3 \text{ Jkg}^{-1}$
20,0	2,38	2456
22,0	2,69	2452
25,0	3,23	2446
27,0	3,46	2441
30,0	4,33	2434
34,0	5,13	2425
37,0	6,42	2418
40,0	7,50	2412
50,0	12,33	2378

Sifat udara (20°C)

$$\rho = 1,20 \text{ kg m}^{-3}$$

$$\mu = 17,10^{-6} \text{ N det m}^{-2}$$

$$C_p = 1,03 \cdot 10^3 \text{ J kg}^{-1} \text{ }^\circ\text{C}^{-1}$$

$$K = 2,5 \cdot 10^{-2} \text{ W m}^{-1} \text{ }^\circ\text{C}^{-1}$$

$$D_{\text{H}_2\text{O-udara}} = 2,6 \cdot 10^{-5} \text{ m}^2 \text{ det}^{-1}$$

$$\alpha = 20 \cdot 10^{-6} \text{ m}^2 \text{ det}^{-1}$$

$$R = 8310 \text{ J kmol}^{-1} \text{ K}^{-1}$$

Jawab : $T_b = 22^\circ\text{C}$

11. Udara dari soal nomor 10, dipanaskan sampai 50°C pada tekanan yang sama, pada temperatur 50°C itu berapakah tekanan parsial uap air, kelembaban nisbi udara dan temperatur bola-basah ?

Jawab : $P_g = 2,58 \cdot 10^3 \text{ Nm}^{-2}$: $T_b = 26,7^\circ\text{C}$

Kelembaban nisbi 20,9%

12. Udara (50°C) dari soal nomor 11 diwatkan bahan basah. Jika koefesien pindah panas h pada permukaan bahan itu besarnya $35 \text{ Wm}^{-2} \text{ }^\circ\text{C}^{-1}$ dan boleh dianggap bahwa panas untuk penguapan itu seluruhnya didapat dari udara, hitunglah berapa banyak air yang menguap per m² bahan

Jawab : $N_A = 3,42 \cdot 10^{-4} \text{ kgm}^{-2} \text{ det}^{-1}$

A. Evaluasi

1. Jelaskan pengertian Perpindahan massa
2. Jelaskan jenis-jenis perpindahan massa.
3. Jelaskan teori lapisan dan penyebaran konsentrasi

4. Buatlah contoh perpindahan massa

B. Buku Sumber, Bacaan Pendukung

Douglas, J.M., 1988, "Conceptual Design of Chemical Processes"

H.S. Carslaw & J.C. Jaeger, 1959, "Conduction of Heat in Solids", Oxford University Press.

R.B. Bird, W.E. Stewart & E.N. Lightfoot, 1965, "Transport Phenomena, Jhon Wiley".

Rudd, D.F., and Watson, C.C., 1968, "Strategy of Process Engineering", John Wiley and Sons, Inc., New York.

Tjipto Utomo, 1981, "Pengantar Peristiwa Perpindahan", Proyek kerjasama JTA-9A Departemen Teknologi Kimia, ITB- Universitas Teknologi Twente di Naderland

Townsend, D.W., and Linnhoff, B., 1982, "Designing Total Energy System by Systematic Methode", Chem. Eng. No.378, London

W.J. Beek & K.M.K. Mutzall, Transport Phenomena, Jhon Wiley, 1975.

W.H. McAdams, Heat Transmission, McGram-Hill, 1954

BAB 5

PERPINDAHAN MOMENTUM

Dalam bab ini akan dipelajari peristiwa-peristiwa dimana terjadi perpindahan momentum, yaitu semua kejadian yang menyangkut aliran atau gerakan fluida.

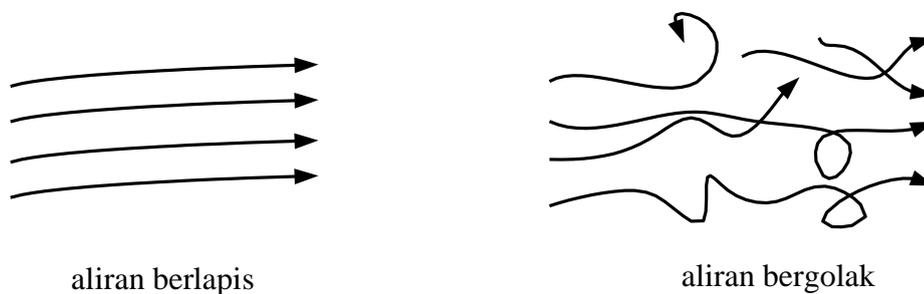
Aliran fluida digolongkan menjadi aliran berlapis (laminar) dan aliran bergolak (turbulen). Pengetahuan kita tentang aliran berlapis lebih jelas, sehingga memudahkan analisisnya. Dalam meninjau aliran bergolak masih banyak digunakan keterangan hasil percobaan.

Dengan membuat neraca energi mekanis dapat diperoleh persamaan untuk faktor gesekan, dan dapat dihitung energi yang “hilang”, dan daya yang diperlukan untuk aliran dalam pipa.

Akan dibicarakan juga perhitungan alat-alat pengukur aliran, hambatan terhadap aliran oleh benda-benda yang terendam dan beberapa penerapan.

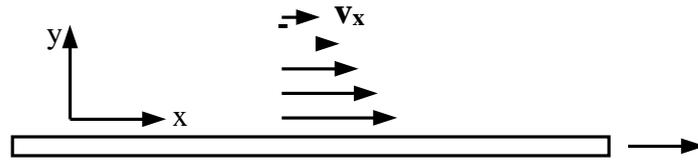
5.1. ALIRAN BERLAPIS

Dalam suatu aliran berlapis bagian-bagian fluida bergerak melalui jalur-jalur yang sejajar satu dengan lain, dan tetap mengikuti arah alir. Dalam suatu aliran bergolak terdapat banyak gejala kesamping, meninggalkan arah alir, akan tetapi secara keseluruhan terdapat gerakan ke arah alir. Gambar 5.1 di bawah ini menggambarkan jenis-jenis aliran fluida



Gambar 5.1. Jenis-jensi Aliran Fluida.

Misalkan ada bidang padat yang berbatasan dengan cairan seperti pada Gambar 5.2. Sebuah mistar yang sebagian dicelupkan dalam air. Andaikan, bahwa mula-mula tidak ada gerakan. Pada suatu waktu bidang digerakkan dengan kecepatan yang tetap (v). Maka akan terlihat, bahwa mula-mula bagian cairan yang menempel pada bidang akan bergerak, akan tetapi kemudian bagian-bagian cairan yang agak berjauhan dari bidang itu, juga akan ikut bergerak searah dengan arah gerakan bidang.



Gambar 5.2. Perpindahan Momentum.

Molekul-molekul cairan yang tidak langsung bersentuhan dengan bidang padat itu, bergerak dengan kecepatan yang lebih kecil dari v , makin jauh dari bidang makin kecil kecepatannya. Bidang padat dapat memindahkan momentum mv ke arah tegak lurus pada arah kecepatan v .

Kearah berpindahnya momentum itu (tegak lurus pada arah v) terdapat suatu perubahan dalam besarnya kecepatan, terdapat suatu gradien kecepatan $\frac{dv_x}{dy}$. Terjadinya perpindahan momentum itu disebabkan oleh adanya gaya tarik menarik antar molekul, yang menimbulkan tegangan geser τ_{yx} . Peristiwa ini digambarkan oleh hukum Newton untuk viskositas

$$\tau_{yx} = -\mu \frac{dv_x}{dy} \quad (5-1)$$

Viskositas μ dalam sistem cgs mempunyai satuan $(g \cdot massa)(cm^{-1})(detik^{-1})$, yang juga disebut poise. Faktor-faktor dalam Persamaan (5-1) dalam sistem cgs mempunyai satuan sebagai berikut

$$v_x = cm \ det^{-1}$$

$$y = cm$$

$$\mu = g \ cm^{-1}det^{-1}$$

Sehingga untuk τ_{yx} diperoleh satuan

$$\tau_{yx} = g (cm \cdot det^{-2}) cm^{-2} = dine \cdot cm^{-2} \quad = g (cm \cdot det^{-1}) det^{-1} cm^{-2} = g \cdot v \cdot det^{-1} cm^{-2}$$

Dari uraian di atas terlihat, bahwa tegangan geser τ merupakan gaya yang bekerja per satuan luas sejajar dengan arah x . Tetapi τ dapat juga dianggap sebagai banyaknya momentum per satuan waktu yang melewati satu-satuan luas ke arah y . Yang terakhir ini disebut laju alir momentum, per satuan luas atau fluksi momentum.

τ_{yx} berarti bahwa kecepatan v_x , yang menimbulkan perpindahan momentum, arahnya ke x , dan arah pindah momentum itu sendiri ialah y . Kemudian τ_{yx} dalam sistem koordinat tegaklurus hanyalah satu dari sembilan suku-urai (komponen) tensor tegangan geser τ .

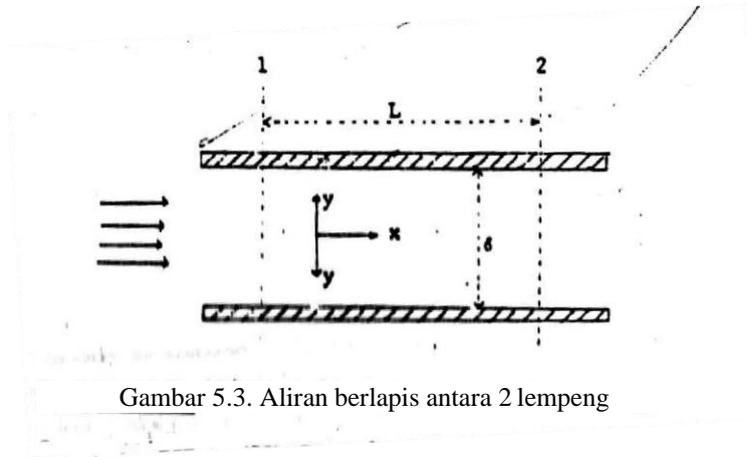
Sekaligus Persamaan (5-1) merupakan definisi untuk viskositas μ . fluida yang mengikuti Hukum Newton ini disebut fluida Newton, yang mempunyai harga μ yang tetap untuk temperatur tertentu. Viskositas merupakan sifat fisis fluida yang besarnya tergantung pada tekanan dan temperatur.

Fluida yang viskositasnya selain pada tekanan dan temperatur, juga tergantung pada faktor-faktor lain, misalnya waktu, disebut fluida tak-Newton. Contoh cairan tak-Newton ialah : pasta, aspal cair, dsb. Fluida-fluida ini tidak dibahas lebih lanjut.

Untuk mengenal soal aliran berlapis, marilah kita tinjau contoh dibawah ini

Contoh 1

Aliran berlapis antara dua lempeng datar seperti pada Gambar 5.3 dibawah ini



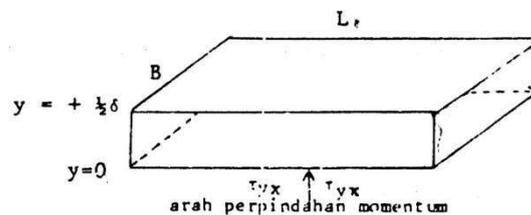
Suatu cairan newton mengalir dengan kecepatan tetap secara berlapis antara 2 lempeng mendatar yang berjarak δ satu dari lain. Kedua lempeng itu tak terhingga panjang dan lebarnya.

Diminta mencari penyebaran (= distribusi) kecepatan v_x , yang berarti mencari fungsi matematis yang menyatakan bagaimana v_x berubah dalam arah y sewaktu cairan mengalir diantara kedua lempeng, marilah masalah ini kita analisa lebih dahulu.

Arah perpindahan momentum adalah dari tengah-tengah aliran ke arah kedua lempeng. Karena itu sebagai sistem koordinat dipilih sistem sumbu tegak lurus dengan bidang $y = 0$ ditengah-tengah aliran. Sistem sumbu ini akan memudahkan menyatakan bentuk matematis aliran.

Volum-Banding dipilih sedemikian, supaya hanya dihadapi satu arah pepindahan, yaitu misalnya volume antara bidang $y = 0$, lempeng atas selebar B dan di antara bidang 1 dan 2 berjarak L . Untuk pembuatan neraca dipilih arah pindah ke atas dalam Gambar 5.3.

Volume-banding digambarkan pada Gambar 5.4 berikut ini



Gambar 5.4. Volume-banding Contoh 4.1

Dalam menerapkan Persamaan (5-2) perlu diperhatikan, bahwa

$$X = mv, \text{ jadi } [X] = \frac{mv}{\text{volum}} = \rho v$$

$$G_x = \tau_{yx} = \frac{mv}{t \cdot \text{luas}}$$

$\text{vol} \cdot R_x = \text{jumlah semua gaya yang bekerja pada sistem} = F_x$ (selain tegangan geser)

Besaran-besaran ini dimasukkan ke dalam persamaan (5-2).

$$BL\delta \frac{d(\rho v_x)}{dt} = \tau_{yx} \cdot BL \Big|_{y=0} - \tau_{yx} \cdot BL \Big|_{y=+\frac{1}{2}\delta} + F_x \quad (5-2)$$

Dalam contoh ini F_x merupakan jumlah hasil kerja tekanan dan gravitasi.

$$F_x = P_1 B \delta - P_2 B \delta + BL \delta \rho g \quad (5-3)$$

Karena dalam hal ini pengaruh gravitasi dapat diabaikan, maka substitusi persamaan (5-3) ke dalam (5-2) memberikan :

$$BL \delta \frac{d(\rho v_x)}{dt} = \tau_{yx} \cdot BL \Big|_{y=0} - \tau_{yx} BL \Big|_{y=+\frac{1}{2}\delta} + (P_1 - P_2) B \delta \quad (5-4)$$

Kalau semua suku persamaan (5.4) dibagi dengan volum $BL\delta$, sambil δ dibuat sekecil mungkin, maka :

$$\tau_{yx}|_{y=0} - \tau_{yx}|_{y=+\frac{1}{2}\delta} \text{ menjadi } -d\tau_{yx}$$

$$\delta \text{ menjadi } dy$$

Dan diperoleh :

$$\frac{d(\rho v_x)}{dt} = -\frac{d\tau_{yx}}{dy} + \frac{(P_1 - P_2)}{L} \quad (5-5)$$

Jika sistem itu pada semua bagian-bagiannya mempunyai sifat yang tidak berubah dengan waktu, maka Keadaan itu disebut Mantap, dan

$$\frac{d(\rho v_x)}{dt} = 0,$$

Yang berarti tidak ada akumulasi momentum dalam sistem itu, dan diperoleh :

$$d\tau_{yx} = \frac{(P_1 - P_2)}{L} dy \quad (5-6)$$

Yang merupakan persamaan differensial untuk τ_{yx} . Jika diintegrasikan akan didapat persamaan yang dapat di pakai untuk menghitung τ_{yx} .

$$\int d\tau_{yx} = \frac{(P_1 - P_2)}{L} \int dy$$

$$\tau_{yx} = \frac{(P_1 - P_2)}{L} \cdot y + C_1 \quad (5-7)$$

Persamaan (5-7) disebut persamaan penyebaran tegangan geser τ_{yx} , yang memperlihatkan bahwa τ_{yx} berubah secara lurus dengan y .

Jika dikehendaki keterangan tentang kecepatan v_x , maka persamaan (5-6) di ubah dengan menggunakan hukum Newton (5-1) menjadi :

$$d\tau_{yx} = -\mu d\left(\frac{dv_x}{dy}\right) = \frac{(P_1 - P_2)}{L} dy \quad (5-8)$$

Untuk memperoleh persamaan penyebaran v_x persamaan (5-8) diintegrasikan dua kali :

$$\frac{dv_x}{dy} = \frac{(P_1 - P_2)}{\mu L} \cdot y + C_1 \quad (5-9)$$

Kedua tetapan integrasi C_1 dan C_2 harus diberi nilai dengan menggunakan syarat batas. Syarat batas adalah keterangan tentang besaran-besaran yang sedang ditinjau (yaitu τ_{yx} dan v_x) pada batas-batas volum-banding atau sistem.

Salah satu syarat batas memberikan harga v_x pada permukaan lempeng. Molekul-molekul yang bersentuhan dengan lempeng dapat dianggap menempel erat pada permukaannya, sehingga kecepatannya $v_x = 0$.

Karena kecepatan alir itu simetris terhadap bidang $y = 0$, maka kecepatan terbesar akan terjadi ditengah-tengah dan disitu tegangan geser adalah nol (0) maksimum dan

$$\tau_{yx} = -\mu \frac{dv_x}{dy} = 0. \quad (5.10)$$

Uraian diatas memberikan syarat batas :

$$\text{S.B. 1. Pada } y = \pm \frac{1}{2} \delta, v_x = 0 \quad (5.11)$$

$$\text{S.B. 2. Pada } y = 0, \tau_{yx} = 0 \quad (5.12)$$

Kalau kedua syarat batas diterapkan pada persamaan (5-10) diperoleh :

$$\text{S.B. 1. : } 0 = -\frac{(P_1 - P_2)}{8\mu L} y^2 + \frac{1}{2} \delta C_1 + C_2 \quad (5.13)$$

$$\text{S.B. 2.: } \tau_{yx} = -\mu \frac{dv_x}{dy} = 0 \rightarrow \frac{dv_x}{dy} = 0.$$

Hasil terakhir dan $y = 0$ dimasukkan persamaan (5-9)

$$0 = -\frac{(P_1 - P_2)}{\mu L} \cdot 0 + C_1$$

$$C_1 = 0 \quad (5.14)$$

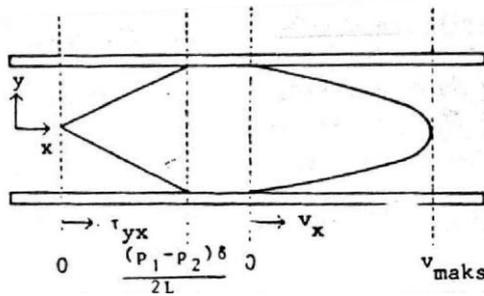
Persamaan (5-14) dimasukkan persamaan (5-13) :

$$C_2 = \frac{(P_1 - P_2) \delta^2}{8\mu L} \quad (5.15)$$

Kalau kedua harga untuk C_1 dan C_2 dimasukkan persamaan (5-10) dan diperbaiki susunannya, di dapat v_x .

$$v_x = \frac{(P_1 - P_2) \delta^2}{4\mu L} - y^2 \quad (5.16)$$

Ternyata bahwa v_x merupakan fungsi kuadrat dalam y , dan garis penyebarannya berbentuk parabola (Gambar 5-5).



Gambar 5.5. Penyebaran tegangan geser dan kecepatan dalam aliran laminar yang mantap antara 2 lempeng

Sesudah diperoleh persamaan penyebaran v_x , dapat diturunkan berbagai besaran lain.

1. KECEPATAN RATA-RATA $\langle v_x \rangle$ didefinisikan sebagai berikut :

$$\langle v_x \rangle = \frac{\int_0^{B+\frac{1}{2}\delta} \int_{-\frac{1}{2}\delta}^0 v_x dy dz}{\int_0^{B+\frac{1}{2}\delta} \int_{-\frac{1}{2}\delta}^0 dy dz} \quad (5-17)$$

Sesudah persamaan (5-16) disubstitusikan ke dalam persamaan (5-17) dan dilaksanakan pengintegrasian di dapat :

$$\langle v_x \rangle = \frac{(P_1 - P_2)\delta}{12\mu L} \quad (5-18)$$

2. KECEPATAN MAKSIMUM $v_{x,\text{maks}}$ diperoleh dengan mencari maksimum fungsi v_x (5-16).

Karena geometri sistem ini mempunyai bidang simetri, dapat dilihat secara mudah, bahwa $v_{x,\text{maks}}$ tercapai pada $y = 0$, sehingga :

$$v_{x,\text{maks}} = \frac{(P_1 - P_2)\delta}{8\mu L} \quad (5-19)$$

atau

$$v_{x,\text{maks}} = \frac{3}{2} \langle v_x \rangle$$

3. LAJU ALIR VOLUM Q diperoleh dengan menghitung hasil kali $\langle v_x \rangle$ x luas penampang.

$$Q = \int_0^B \int_{-\frac{1}{2}\delta}^{+\frac{1}{2}\delta} v_x dy \quad (5-20)$$

$$\begin{aligned} Q &= \langle v_x \rangle \cdot B \delta \\ &= \frac{(P_1 - P_2) 8\delta^3}{8\mu L} \end{aligned}$$

LAJU ALIR MASSA rata-rata adalah :

$$G = Q \cdot \rho = \frac{(P_1 - P_2) \rho B \delta^3}{8 \mu L}$$

4. Besarnya TEGANGAN GESER PADA PERMUKAAN , lempeng di hitung dari persamaan (5-7), dengan mengisikan $y = \frac{1}{2}\delta$:

$$\tau_{yx} \Big|_{y=\frac{1}{2}\delta} = \tau_w \frac{(P_1 - P_2) \delta}{2L} \quad (5-21)$$

CONTOH SOAL

Mempelajari ilmu pengetahuan teknik tidak cukup jika hanya dilakukan sampai tahap pengertian. Penguasaan bahan pelajaran perlu dilanjutkan sampai diperoleh keterampilan dalam menyelesaikan soal itu, diperlukan latihan untuk membantu memberi daya guna yang lebih besar kepada latihan menyelesaikan soal oleh mahasiswa sendiri, maka dibawah ini akan diebrikan contoh-contoh penyelesaian soal, menurut metode penyelesaian soal secara sistematis.

Skema dan keterangan tentang metoda itu di muat sebagai lampiran II catatan kuliah ini.

Bacalah dengan seksama lampiran II lebih dulu sebelum mempelajari contoh-contoh soal yang berikut.

a. Aliran berlapis dalam pipa.

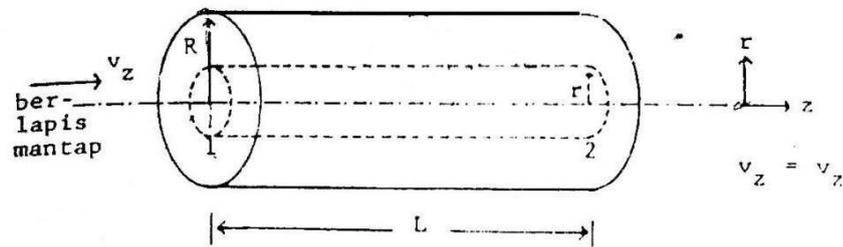
SOAL 1

Suatu cairan newton mengalir secara berlapis dan mantap dalam pipa datar. Carilah penyebaran kecepatan dalam aliran itu, terhadap jari-jari r .

Marilah soal ini kita selesaikan menurut metoda “penyelesaian soal secara sistematis” (PSSS). Buka halaman yang memuat lampiran II ke luar, sehingga anda dapat memeriksa setiap langkah, sambil membaca uraian di bawah ini.

ANALISA

Kita mulai dengan membaca soal di atas dengan seksama, dan kemudian membuat analisa dari soal tadi. Analisa itu diawali dengan membuat skema sistem pipa itu dan menuliskan semua besaran yang sudah diketahui dan yang di tanyakan. Satuan dan dimensi tidak menjadi masalah dalam soal ini, sehingga tidak perlu dicatat.



Gambar 5.6. Aliran Berlapis dalam pipa

Skema terlihat pada gambar diatas. Besaran yang di ketahui v_z berlapis dan mantap. Penyebaran v_z (yang ditanyakan) dinyatakan dalam suatu fungsi $v_z(r)$. $v_z(r)$ inilah yang dicari.

Volum-banding yang dipilih berupa silinder (jari-jari r , panjang L), yang porosnya sama dengan poros pipa dan panjang pipa dinamakan R dan L .

Sebagai sistem koordinat dipilih sistem silinder. Dalam geometri yang mempunyai bidang atau garis simetri, maka kecepatan maksimum terdapat pada sumbu simetri itu. Di tempat itu τ bernilai 0. Sebaliknya pada dinding atau permukaan saluran terdapat τ maksimum. kecepatan pada permukaan itu dianggap sama dengan nol, atas dasar anggapan bahwa di tempat itu molekul-molekul fluida terkait erat pada dinding dan tidak bergerak. Anggapan-anggapan ini kemudian akan menghasilkan syarat-syarat batas.

RENCANA

rencana pemecahan mengikuti cara pemecahan contoh soal .1. Perhitungan penyebaran suatu besaran termasuk soal-baku, yang penyelesaiannya selalu dapat dilakukan dengan tahap-tahap yang berikut :

- i. Buat neraca momentum dala volum-banding.
- ii. Sederhanakan persamaan neraca itu dan bagi oleh volum.
- iii. Masukkan keterangan tentang keadaan sistem (keadaan mantap; gravitasi tidak berpengaruh, dls.)
- iv. Peroleh suatu persamaan differensial dari hasil akhir neraca denngan membuat r kecil sekali.
- v. Tetapkan syarat batas untuk menentukan nilai tetapan integrasi.
- vi. Substitusikan nilai tetapan integrasi.

Dalam hal ini HUBUNGAN POKOK adalah neraca momentum. Disamping itu berlaku HUKUM NEWTON dan anggapan bahwa μ dan ρ adalah tetap.

Neraca momentum : pers.(I.1) untuk $X = mv$.

$$\text{Hukum Newton : } \tau_{rz} = -\mu \frac{dv_z}{dr}$$

$$\mu \text{ tetap, } \rightarrow d\mu = 0$$

$$\rho \text{ tetap, } \rightarrow d\rho = 0$$

PENYELESAIAN

Dalam penyelesaian kita lakukan langkah-langkah yang disebut dalam rencana. Untuk pembuatan neraca perlu ditetapkan, bahwa arah perpindahan momentum adalah ke arah sumbu r positif. Berdasarkan persamaan (5.1) unsur-unsur neraca itu adalah sebagai berikut.

Akumulasi = 0, karena keadaan mantap.

Laju alir momentum yang masuk pada $r = 0$:

$$\tau_{rz} \cdot 2\pi r L|_{r=0}$$

Laju alir momentum yang keluar pada $r = r$

$$-\tau_{rz} \cdot 2\pi r L|_{r=r}$$

Gaya-gaya dari luar yang bekerja pada sistem ialah :

Pada $z = 0$: $+ P_1 \cdot \pi r^2$ (karena arahnya ke z- positif)

Pada $z = L$: $- P_2 \cdot \pi r^2$ (karena arahnya ke z- negatif)

Gaya-gaya dari luar inilah yang dapat menimbulkan momentum dalam sistem di luar momentum dari kecepatan.

Unsur-unsur di atas di susun sebagai neraca yang berikut :

$$0 = \tau_{rz} \cdot 2\pi r L|_{r=0} - \tau_{rz} \cdot 2\pi r L|_{r=r} + (P_1 - P_2)\pi r^2$$

Neraca di atas harus di perbaiki semuanya untuk memudahkan penyelesaiannya. Faktor-faktor tetap dikeluarkan, faktor-faktor yang berubah disatukan.

$$0 = 2\pi L \{ \tau_{rz} \cdot r|_{r=0} - \tau_{rz} \cdot r|_{r=r} \} + (P_1 - P_2)\pi r^2$$

Ruas kiri dan kanan dibagi dengan besarnya volum-banding : $\pi r^2 L$.

$$0 = \frac{2\{ \tau_{rz} \cdot r|_{r=0} - \tau_{rz} \cdot r|_{r=r} \}}{r^2} + \frac{(P_1 - P_2)}{L}$$

Sekarang semua selisih dan r dibuat kecil sekali, mendekati nol. Perubahan-perubahan yang terjadi ialah :

$$\begin{aligned} \tau_{rz} \cdot r|_{r=0} - \tau_{rz} \cdot r|_{r=r} & \text{ menjadi } - \\ d(\tau_{rz} r) r^2 & \text{ menjadi } d(r^2) = 2 \\ & r dr \\ P_1 - P_2 & \text{ menjadi } - dp \end{aligned}$$

Hasil neraca ialah :

$$0 = \frac{-2d(\tau_{rz}r)}{2rdr} - \frac{dp}{L} \quad (5-22)$$

$$\frac{d(\tau_{rz}r)}{rdr} = -\frac{dp}{L}$$

$$d(\tau_{rz}r) = -\frac{dp}{L} rdr$$

Jika diintegrasikan, diperoleh :

$$\tau_{rz} r = -\frac{\Delta P}{2L} r^2 + C_1 \quad (\Delta P = P_2 - P_1)$$

$$\tau_{rz} = -\frac{\Delta P}{2L} r + \frac{C_1}{r} \quad (5-23)$$

Untuk memudahkan penulisan, syarat batas pertama digunakan disini.

S.B. 1. : pada $r = 0$, $\tau_{rz} = 0$

Substitusi syarat batas pertama ke dalam persamaan (5-23) menghasilkan $C_1 = 0$

Selanjutnya HUKUM NEWTON DIMASUKKAN kedalam persamaan (5-23).

$$\tau_{rz} = -\mu \frac{dv_z}{dr} = -\frac{\Delta P}{2L} r$$

$$dv_z = \frac{\Delta P}{2\mu L} r dr$$

Integrasi memberikan :

$$v_z = \frac{\Delta P}{4\mu L} r^2 + C_2$$

Dengan syarat batas kedua diperoleh harga C_2 .

S.B. 2 : pada $r = R$, $v_z = 0$

$$C_2 = -\frac{\Delta P}{4\mu L} R^2$$

Akhirnya dengan memasukkan nilai C_2 diperoleh fungsi peneybaran v_z :

$$v_z = \frac{\Delta P}{4\mu L} r^2 - \frac{\Delta P}{4\mu L} R^2$$

$$v_z = \frac{\Delta P}{4\mu L} (r^2 - R^2) \quad (5-24)$$

Atau

$$v_z = \frac{\Delta P R^2}{4\mu L} \left\{ \left(\frac{r}{R}\right)^2 - 1 \right\} = \frac{(P_1 - P_2)R^2}{4\mu L} \left\{ 1 - \left(\frac{r}{R}\right)^2 \right\}$$

PENILAIAN

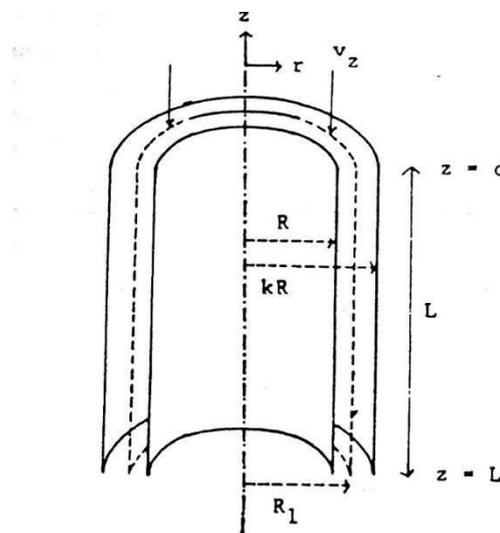
Hasil penurunan itu memperlihatkan, bahwa penyebaran kecepatan dalam aliran berlapis mantap dalam pipa merupakan fungsi parabola. Terhadap hasil ini kita lakukan PENILAIAN kembali.

Bentuk parabola sesuai perkiraan, bahwa harga maksimum untuk kecepatan tercapai pada $r = 0$. Tidak ada hal lain yang ditanyakan, sehingga besaran-besaran lain tidak perlu diturunkan.

b. Aliran berlapis melalui anulus.

SOAL 2

Dalam ruang antara dua pipa konsentris mengalir suatu cairan Newton secara berlapis dan mantap. Jika kedua pipa itu tegak lurus dan cairan mengalir kebawah, carilah penyebaran kecepatan dan tegangan geser dalam aliran tadi.



Gambar 5.7. Aliran melalui anulus

ANALISA

Skema sistem digambarkan pada gambar 5.7. Jari-jari penampang pipa dinamakan R dan kR , dan panjang pipa disebut L . Diketahui, bahwa cairan Newton mengalir secara berlapis dan mantap. Ditanyakan : penyebaran v_z dan τ_{rz} .

Dengan sendirinya dipilih sistem koordinat silinder dengan sumbu z diposisikan ke arah kedua pipa itu. Sebagai volume-banding dipilih bagian anulus yang terletak antara bidang-bidang datar $z = 0$ dan $z = L$, dan bidang silinder yang melalui v_{maks} (misalkan pada $r = R_1$). Momentum berpindah secara radial.

RENCANA

Rencana penyelesaian adalah sama edengan contoh 2 rencana ini berlaku untuk semua penyelesaian soal untuk memperoleh penyebaran kecepatan. Biasanya lebih mudah untuk mencari penyebaran τ_{rz} lebih dahulu, kemudian baru penyebaran v_z . Disini berlaku hal lain. Sebabnya di uraikan di bawah ini. Juga disini besarnya nilai v_z pada kedua dinding saluran dianggap nol. v_z menjadi $v_{z,\text{maks}}$ dan $\tau_{rz} = 0$,pada $r = R_1$. $R < R_1 < kR$, akan tetapi nilai R_1 untuk sementara belum diketahui. Karena itu R_1 tidak boleh dimuat dalam syarat batas.

Sebagai latihan tulislah secara tepat dengan kata-kata sendiri rencana penyelesaian soal itu dengan terperinci, tanpa melihat pada contoh soal 2

PENYELESAIAN

Penyelesaian dimulai dengan membuat neraca momentum dalam volum-banding.

$$\text{Akumulasi} = \pi(k^2R^2 - R_1^2)L \frac{d(\rho v_z)}{dt}$$

$$\text{Selisih laju pindah momentum, } \tau_{rz} \cdot 2\pi r \Big|_{r=R_1}^L - \tau_{rz} \cdot 2\pi r \Big|_{r=kR}^L$$

Gaya-gaya yang bekerja pada sistem,

$$\text{Tekanan : } (P_0 - P_L)\pi(k^2R^2 - R_1^2)$$

$$\text{Gaya berat : } \pi(k^2R^2 - R_1^2)L\rho g$$

Dalam hal penulisan laju pindah momentum $\tau_{rz} \cdot 2\pi r \Big|_{r=R_1}^L$ perlu diperhatikan, bahwa tanda | ditulis disebelah kanan dari semua perubah, yaitu τ_{rz} dan r . Disini $(\tau_{rz} \cdot r)$ merupakan suatu besaran yang belum diketahui bentuknya, dan karena itu harus dianggap sebagai satu perubah baru, yang berubah menjadi $d(\tau_{rz} \cdot r)$ sewaktu r menjadi dr .

Penerapan persamaan (2) memberikan :

$$\pi(k^2R^2 - R_1^2)L \frac{d(\rho v_z)}{dt} = \tau_{rz} \cdot 2\pi r \Big|_{r=R_1}^L - \tau_{rz} \cdot 2\pi r \Big|_{r=kR}^L + (P_0 - P_L)\pi(k^2R^2 - R_1^2) + \pi(k^2R^2 - R_1^2)L\rho g$$

Kalau dibagi dengan volum $\pi(k^2R^2 - R_1^2)L$, serta semua selisih dan r dibuat kecil, maka :

$$\begin{aligned} k^2R^2 - R_1^2 & \text{ menjadi } dr^2 \\ \tau_{rz} r \Big|_{r=R_1} - \tau_{rz} r \Big|_{r=kR} & \text{ menjadi } -d(r\tau_{rz}) \end{aligned}$$

Dan diperoleh :

$$\frac{d(\rho v_z)}{dt} = -\frac{2d(r\tau_{rz})}{dr^2} + \frac{(P_0 - P_L)}{L} + \rho g \quad (5-25)$$

Untuk setiap keadaan mantap persamaan (5-25) menjadi :

$$0 = - \frac{d(r\tau_{rz})}{rdr} - \frac{(P_0 - P_L)}{L} + \rho g$$

$$\frac{d(r\tau_{rz})}{rdr} = \frac{(P_0 - P_L) + \rho gL}{L}$$

$$d(r\tau_{rz}) = \frac{P_0 - P_L + \rho gL}{L} r dr$$

Integrasi memberikan :

$$r\tau_{rz} = \frac{P_0 - P_L + \rho gL}{2L} r^2 + C_1$$

$$\tau_{rz} = \frac{P_0 - P_L + \rho gL}{2L} r + \frac{C_1}{r}$$

Karena R_1 sebenarnya tidak diketahui, maka disini syarat batas $r = R_1$ tidak dapat dipakai. Pemakaian syarat batas ini akan menghasilkan nilai C_1 yang memuat R_1 , yang berarti nilai C_1 belum diketahui juga. Karena itu penyebaran τ_{rz} dicari kemudian. Substitusi hukum newton dalam persamaan diatas memberikan :

$$-\mu \frac{dv_z}{dr} = \frac{P_0 - P_L + \rho gL}{2L} r + \frac{C_1}{r}$$

Integrasi memberikan :

$$v_z = - \frac{P_0 - P_L + \rho gL}{4\mu L} r^2 + \frac{C_1}{\mu} \ln r + C_2$$

Syarat batas 1 : $r = R, v_z = 0$

Syarat batas 2 : $r = kR, v_z = 0$

Substitusi syarat memberikan :

$$C_1 = - \frac{(P_0 - P_L + \rho gL)R^2}{4L} \frac{(k^2 - 1)}{\ln k}$$

$$C_2 = \frac{(P_0 - P_L + \rho gL)R^2}{4\mu L} \left(1 - \frac{k^2 - 1}{\ln k} \ln R \right)$$

Akhirnya diperoleh penyebaran τ_{rz} dan v_z .

$$\tau_{rz} = \frac{(P_0 - P_L + \rho gL)R}{2L} \left\{ \frac{r}{k} - \frac{(k^2 - 1)R}{2 \ln k} \left(\frac{r}{R} \right) \right\} \quad (5-26)$$

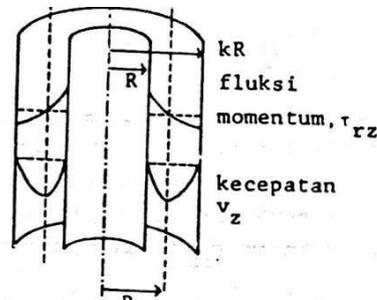
$$v_z = \frac{(P_0 - P_L + \rho gL)R^2}{4\mu L} \left\{ 1 - \left(\frac{r}{R} \right)^2 + \frac{k^2 - 1}{k} \frac{r}{R} \right\} \ln \left(\frac{r}{R} \right)$$

}} (5-27)

Bandingkan persamaan (5-27) dengan persamaan (5-24) contoh 2.a. kedua persamaan itu pada umumnya mirip dengan dua perbedaan, yaitu :

- Pengaruh gravitasi $\rho g L R^2$
- Suku $\frac{k^2-1}{\ln k} \ln \left(\frac{r}{R} \right)$ yang merupakan penyimpangan terhadap persamaan parabola. Untuk $k = 1$ persamaan (5-27) berubah menjadi parabola.

Penyebaran τ_{rz} dan v_z digambarkan dalam gambar 5.8.

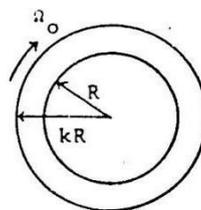


Gambar 5.8. Penyebaran tegangan geser dan kecepatan anulus

c. Aliran tangensial dalam anulus.

SOAL

Ruang anulus dalam dua silinder tegak terisi oleh cairan. Kedua silinder tertutup pada satu ujungnya. Mula-mula kedua silinder dan cairan itu diam. Pada suatu saat silinder-luar diputar dengan kecepatan sudut Ω_0 yang tetap. Carilah penyebaran v_θ dan hitung momen yang bekerja pada silinder luar.



Gambar 5.9. Aliran tangensial dalam anulus

ANALISA

Bagan sistem digambarkan pada gambar 5.9. Dipilih sistem koordinat silinder dengan sumbu z pada poros kedua silinder. Sebagai volum-banding dipilih bagian anulus yang terletak antara bidang-bidang $z = 0$ dan $z = L$. Momentum berpindah secara radial ke arah sumber r negatif. Tidak ada selisih tekanan, karena liran ke arah θ tidak disebabkan oleh selisih tekanan, tetapi oleh

gerakan suatu permukaan padat. Juga tidak ada pengaruh gravitasi, karena alas silinder meniadakan pengaruh itu.

Pembuatan neraca momentum dalam sistem koordinat silinder memerlukan penyesuaian terhadap dimensi v_θ dan $\tau_{r\theta}$. Pembuktian untuk cara penyesuaian itu berada diruang lingkup kuliah ini. Selanjutnya hanya dapat diberikan sekedar penjelasan.

RENCANA

Rencana pemecahan soal ini tetap sama dengan contoh 2.a. Pembuatan neraca momentum bertujuan memperoleh persamaan untuk $\tau_{r\theta}$ sebagai fungsi r. Substitusi hukum newton akan memberikan persamaan $v_\theta = v_\theta(r)$, yaitu penyebaran v_θ yang ditanyakan.

Momen = gaya x jarak. Gaya yang diberikan dari luar kepada silinder-luar besarnya sama dengan $\tau_{r\theta}$ x luas permukaan yang terkena cairan. Jaraknya ialah kR.

PENYELESAIAN

Penerapan persamaan (5-2) memberikan :

$$\frac{\pi(k^2R^2 - R^2)L}{(r\tau)} \frac{d(\rho r v_\theta)}{dt} = \int_{r=kR}^{r=R} \tau_{r\theta} \cdot 2\pi r \, dr - (r\tau) \cdot 2\pi r \, dr$$

Disini harus dipakai $(r\tau_{r\theta})$ dan bukan $\tau_{r\theta}$, dengan maksud memberikan dimensi kecepatan linier kepada v_θ (= kecepatan sudut, dinyatakan dalam rad/t). Karena $\tau_{r\theta}$ merupakan fungsi v_θ , maka $\tau_{r\theta}$ juga mempunyai dimensi yang sesuai dengan itu.

Untuk merubah dimensi $\tau_{r\theta}$, maka v_θ dinyatakan sebagai kecepatan linier rv_θ dan $\tau_{r\theta}$ menjadi $(r\tau_{r\theta})$. Dengan ini maka ruas kiri persamaan neraca momentum di atas mempunyai dimensi yang sama dengan ruas kanan. Perlu di ingat bahwa tidak ada pengaruh selisih tekanan dan ggraviitasi. Pembagian dengan $\pi(k^2R^2 - R^2)L$, dan membuat semua selisih dan r kecil sekali memberikan :

$$\frac{d(\rho r v_\theta)}{dt} = \frac{2d(r^2 \tau_{r\theta})}{dr^2}$$

Untuk keadaan mantap :

$$\frac{2d(r^2 \tau_{r\theta})}{dr^2} = 0$$

$$d(r^2 \tau_{r\theta}) = 0 \tag{5-28}$$

Integrasi memberikan :

$$r^2 \tau_{r\theta} = C_1$$

$$\tau_{r\theta} = \frac{C_1}{r^2}$$

Dengan hukum newton :

$$\tau_{r\theta} = -\mu r \frac{d}{dr} \left(\frac{v_\theta}{r} \right) \quad (\text{lihat bawah}).$$

$$\frac{d}{dr} \left(\frac{v_\theta}{r} \right) = -\frac{C_1}{\mu r^3}$$

Integrasi memberikan :

$$v_\theta = + \frac{C_1}{2\mu r} + C_2 r$$

Syarat batas 1 : $r = R, v_\theta = 0$

Syarat batas 2 : $r = kR, v_\theta = \Omega_0 kR$

Substitusi syarat batas memberikan :

$$C_1 = -2\Omega_0 \mu R^2 \cdot \frac{k^2}{k^2 - 1}$$

$$C_2 = + \Omega_0 \frac{k^2}{k^2 - 1}$$

$$\tau_{r\theta} = -2\Omega_0 \mu \frac{k^2}{k^2 - 1} \frac{R^2}{r} \quad (5-29)$$

$$v_\theta = \Omega_0 R \frac{k^2}{k^2 - 1} \left\{ \left(\frac{R}{r} \right) - \left(\frac{r}{R} \right) \right\} \quad (5-30)$$

Besarnya momen untuk memutar silinder luar adalah gaya x jarak :

$$M = 2\pi kRL (-\tau_{r\theta})|_{r=kR} \cdot kR$$

$$= 4\pi \Omega_0 \mu LR^2 \frac{k^2}{k^2 - 1} \quad (5-31)$$

KETERANGAN

Salah satu komponen tegangan geser dalam sistem koordinat silinder adalah :

$$\tau_{r\theta} = -\mu r \frac{d}{dr} \left(\frac{v_\theta}{r} \right) = -\mu \frac{rd}{dr} \left(\frac{v_\theta}{r} \right)$$

Untuk daftar komponen yang lengkap, lihatlah dalam lampiran.

RINGKASAN DAN SOAL-SOAL

Telah dibahas pengertian pokok :

- Hukum kekekalan
- Neraca makro
- Aliran berlapis dan bergolak
- Momentum
- Viskositas (kekentalan)

Telah dipelajari cara mencari penyebaran tegangan geser dan kecepatan dalam suatu aliran :

- Neraca momentum
- Penyelesaian persamaan differensial
- Syarat batas
- Besaran yang diturunkan

Coba katakan dengan kata-kata sendiri arti dan maksud tiap pokok bahasan diatas.

SOAL-SOAL :

Dalam catatan kuliah ini setiap kali diberikan soal-soal, akan digunakan nomor urut baru. Soal yang muudah tida diberikan tanda. Soal yang agak sukar diberi huruf a sesudah nomor soal, sedang soal yang lebih sukar lagi diberi tanda b sesudah nomor soal.

1. Suatu lapisan cairan newton mengalir kebawah pada bidang tegaklurus. Tebal lapisan cairan adalah δ . Ambil lebar bidang = B dan perpotongan sumbu koordinat pada bidang. Turunkan persamaan penyebaran tegangan geser dan kecepatan alir.

$$\text{Jawab : } \tau_{xz} = -\rho g(\delta - x); \quad v_z = \frac{\rho g}{\mu}(\delta x - \frac{1}{2}x^2)$$

2. Gambarkan grafik τ_{xz} dan v_z antara $x = 0$ dan $x = \delta$ dari soal No. 1. Dimana terdapat $v_{z,\text{maks}}$? Turunkan persamaan untuk laju alir volum Q.

$$\text{Jawab : } Q = \frac{\rho g \delta^3 B}{3\mu}$$

3. Pada dinding sebelah dalam sebuah pipa tegakluurus (jari-jari R, panjang L) mengalir suatu lapisan cairan Newton secara berlapis. Keadaan adalah mantap dan tebal lapisan = δ . Ambil arah sumbu z positif ke bawah. Carilah fungsi penyebaran kecepatan v_z .

$$\text{Jawab : } v_z = \frac{\rho g}{4\mu} \left\{ R^2 - r^2 + 2(R - \delta)^2 \ln \frac{r}{R} \right\}$$

4. Antara dua bidang sejajar, yang berdiri tegaklurus dan berjarak 2B, mengalir suatu fluida Newton karena gravitasi ($\Delta P = 0$), secara berlapis kebawah. Keadaan dianggap mantap. Carilah fungsi penyebaran kecepatan alir v_z .

$$\text{Jawab : } v_z = \frac{\rho g}{2\mu}(B^2 - x^2)$$

5. Dari soal No. 4 carilah perbandingan antara kecepatan rata-rata $\langle v_z \rangle$ dan kecepatan maksimum v_z . Cari juga besarnya laju alir volum Q.

Jawab : $\langle v_z \rangle / v_s = 2/3$; $Q / \text{satuan lebar} = \frac{2\rho g B^3}{3}$

6. Sebuah silinder yang berdiri tegak lurus terisi suatu cairan Newton. Silinder itu (jari-jari R) berputar dengan kecepatan sudut ω_0 . Carilah penyebaran kecepatan $v_\theta(r)$ dalam cairan.

Jawab : $v_\theta = \omega_0 r$.

- 7a. Suatu cairan Newton yang kental ($\mu = 1 \text{ N} \cdot \text{det}/\text{m}^2$) dipompa melalui pipa

yang datar (diameter $2 \cdot 10^{-2} \text{ m}$, panjang 1 m) kedalam sebuah tanki yang terbuka. Tekanan mutlak dalam pipa sesudah pompa 3 atm dan tekanan barometer 1 atm. Hitunglah laju alir catatan itu dalam liter per detik.

Jawab : 800 l/det.

- 8a. Celah (lebar $1 \cdot 10^{-3} \text{ m}$) antara 2 bidang datar yang sejajar terisi dengan suatu cairan Newton yang kental ($\mu = 100 \text{ N} \cdot \text{det}/\text{m}^2$. Luas bidang 10^{-2} m^2 . Hitunglah gaya yang diperlukan untuk menggerakkan satu bidang sejajar dengan bidang yang lain, sehingga tercapai kecepatan tetap $1 \cdot 10^{-2} \text{ m}/\text{det}$. Hitunglah nilai maksimum tegangan geser dan kecepatan alir, dan gambarkan penyebarannya antara dua bidang itu.

Jawab : $F = 10 \text{ N}$; $\tau_{\text{maks}} = 1000 \text{ N}/\text{m}^2$; $v_{\text{maks}} = 1 \cdot 10^{-2} \text{ m}/\text{det}$.

- 9a. Sebuah viskosimeter-putar terdiri dari sebuah silinder yang berputar (diameter 2 b, kecepatan sudut ω_0 dan sebuah silinder lain (pelampung, diameter 2.a) yang digantungkan secara konsentris dalam silinder yang pertama dengan tali torsi. Untuk tali torsi berlaku hubungan

$\alpha = C M$.

α = perubahan sudut pada pelampung

M = besarnya momen yang bekerja pada pelampung

C = tetapan

Pelampung berada setinggi h dalam cairan yang akan ditetapkan kekentalannya. Turunkan suatu hubungan antara perubahan sudut pelampung dan kekentalan cairan, jika cairan itu mengikuti hukum Newton. Abaikan pengaruh alas silinder.

Jawab :
$$\mu = \frac{\alpha}{\omega_0 h} \left(\frac{b^2 - a^2}{g^2} \right)$$

- 10b. Dalam sebuah saluran tegak lurus (berpenampang persegi, sisi 2A, panjang L) mengalir suatu cairan secara berlapis. Carilah penyebaran kecepatan alirnya.

Jawab : $v_z = \frac{P_0 - P_L + \rho g L}{4\mu L} (2A^2 - x^2 - y^2)$

ANALISA DIMENSI

Dalam teknik kimia hubungan antara beberapa variabel sering dinyatakan dengan menggunakan kelompok-kelompok yang tidak berdimensi. Kelompok semacam itu disebut bilangan tanpa dimensi, dan terdiri dari gabungan besaran fisis dan ukuran geometri. Persamaan-persamaan itu diperoleh melalui analisa dimensi, dan kemudian disempurnakan dengan hasil percobaan.

Cara tersebut mempunyai beberapa keuntungan, yaitu :

- a) Persamaan yang diperoleh mempunyai suku-suku yang sama dimensinya, dan memeriksa kesamaan dimensi ini dapat dilakukan dengan mudah..
- b) Banyaknya perubah sekarang, yang akan mempermudah perencanaan percobaan.
- c) Selalu dapat diperoleh satu persamaan untuk satu masalah. Koefisien dan eksponen yang belum diketahui, dapat ditentukan dengan percobaan.

Terhadap keuntungan-keuntungan itu dapat dikemukakan kerugian, bahwa persamaan yang diperoleh dengan analisa dimensi itu tidak menggambarakan mekanisme peristiwa yang bersangkutan. Fungsi yang sebenarnya hanya dapat diperoleh dengan analisa yang lengkap. Kelemahan yang lain ialah, bahwa tidak dapat diketahui apakah semua perubah yang berpengaruh sudah tercakup dalam persamaan hasil analisa dimensi itu.

Pemakaian bilangan-bilangan tanpa dimensi dalam analisis dimensi akan dijelaskan dengan contoh dibawah ini. Perhatikan urutan tahap-tahap yang dipakai.

Contoh 3.a.

SOAL

Andaikan bahwa kita ingin mengetahui gaya yang bekerja pada sebuah bola padat didalam fluida, yang mengalir kecepatan v_o terhadap bbola itu.

ANALISA

Berdasarkan tinjauan secara fisis dapat dinyatakan bahwa besarnya gaya itu akan tergantung pada diameter bola (d), sifat-sifat fisis fluida (ρ , μ) dan kecepatan alir fluida (v_o), sehingga dapat ditulis :

$$F = \emptyset(d, \rho, \mu, v_o) \quad (5-32)$$

Persamaan (5-32) harus mempunyai dimensi yang homogen, artinya suku-suku diruas kiri harus mempunyai dimensi yang sama dengan suku-suku diruas kanan. Kesamaan dimensi itu akan tetap ada kalau persamaan (5-32) ditulis sebagai berikut :

$$F = dP_\rho q_\mu r_{v_o} s. \quad \text{tetapan (5-33)}$$

RENCANA

Soal ini akan dipecahkan menurut cara analisa dimensi. Untuk itu persamaan (5-33) dinyatakan dalam dimensi baku. Kemudian dicari kelompok-kelompok tanpa dimensi untuk menggantikan perubah-perubah dalam persamaan (5-33).

PENYELESAIAN :

Persamaan (5-33) hanyalah cara menulis yang lain untuk persamaan (5-32). Ini tidak berarti menyatakan, bahwa \emptyset adalah fungsi eksponensial karena semua persamaan dapat diperlakukan demikian tanpa melihat pada sifat peristiwa yang bersangkutan. Menurut dasar analisa dimensi besaran-besaran dalam persamaan (5.33) dapat dinyatakan dalam dimensi baku, umpamanya: panjang (L), waktu (t) dan massa (m), sehingga diperoleh :

$$mLt^2 = L^p (mL^{-3})^q (mt^{-1}L^{-1})^r (Lt^{-1})^s. \text{ Tetapan}$$

Persamaan diatas masih tetap mempunyai dimensi yang homogen, jika dimensi itu dinyatakan dengan L, m dan t. Karena itu jika untuk satu dimensi eksponen-eksponen dijumlahkan, maka jumlah eksponen dalam ruas kiri akan sam dengan jumlah eksponen dalam ruas kanan. Hal ini memberikan hasil yang berikut :

$$\begin{aligned} m &= m^{q+r} & \rightarrow & 1 = q + r \\ L &= L^{p-3q-r+s} & \rightarrow & 1 = p - 3q - r + s \\ t^{-2} &= t^{-r-s} & \rightarrow & -2 = -r - s \end{aligned}$$

Ketiga persamaan disebelah kanan memberikan penyelesaian :

$$\begin{aligned} p &= s \\ q &= s - \\ 1 \ r &= 2 \\ &- s \end{aligned}$$

Kalau harga eksponen-eksponen itu dimasukkan dalam persamaan (5-33) didapat persamaan dengan dimensi yang homogen :

$$F = d^s \rho^{s-1} \mu^{2-s} v_o^s, \text{ tetapan} \quad (5-34)$$

Persamaan di atas memuat 5 besaran (F,d,ρ, μ, v_o) yang dinyatakan dalam 3 dimensi baku (L,m,t), sedang untuk sementara besarnya s belum diketahui. Banyaknya pperubah dapat dikurangi dari 5 menjadi (5-3) = 2 dengan membentuk 2 bilangan tanpa dimensi. Pemilihan bilangan tanpa dimensi tidak dilakukan sebarang saja, akan tetapi sedemikian sehingga bilangan tanpa dimensi itu mempunyai arti khusus.

Andaikan dipilih bilangan tanpa dimensi :

$$\begin{aligned} I &= \frac{F}{\rho \mu v_o} \text{ dan} \\ II &= \frac{d}{\rho \mu v_o} \end{aligned}$$

Dalam mana ρμv_otelah dipilih sebagai penyebut. Masing-masing bilangan I dan II itu tidak berdimensi, sehingga jumlah eksponen setiap dimensi baku dalam pembilang harus sama dengan jumlah eksponen diemnsi tadi dalam penyebut.

Untuk bilangan tanpa dimensi I :

Pembilang I : mLt⁻²

Penyebut I : (mL⁻³)^a (mt⁻¹L⁻¹)^b (Lt⁻¹)^c

Jika jumlah eksponen masing-masing dimensi disamakan, didapat persamaan-persamaan yang berikut :

$$\begin{array}{l} \text{m:} \quad 1 = a + b \\ \text{L:} \quad 1 = -3a - b + c \\ \text{t:} \quad -2 = -b - c \end{array} \left. \vphantom{\begin{array}{l} \text{m:} \\ \text{L:} \\ \text{t:} \end{array}} \right\} \begin{array}{l} a = -1 \\ b = 2 \\ c = 0 \end{array}$$

Bentuk I akhirnya menjadi $I = \frac{\rho F}{\mu^2}$

Dengan cara yang sama diperoleh untuk bilangan tanpa dimensi II bentuk $\frac{\rho v_0 d}{\mu}$ sekarang persamaan (5-34) dapat diubah sehingga merupakan hubungan antara $\frac{\rho F}{\mu^2}$ dan $\frac{\rho v_0 d}{\mu}$, menjadi

$$\frac{\rho F}{\mu^2} = \left(\frac{\rho v_0 d}{\mu} \right)^s \quad \text{tetapan}$$

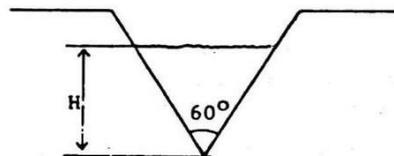
Karena gabungn perubah $\frac{\rho F}{\mu^2}$ dan $\frac{\rho v_0 d}{\mu}$ keduanya tidak berdimensi, maka sebarang hubungan antara keduanya juga kan tidak berdimensi :

$$\frac{\rho F}{\mu^2} = \phi \left(\frac{\rho v_0 d}{\mu} \right) = \phi (\text{Re})$$

Kelompok $\frac{\rho v_0 d}{\mu}$ disebut bilangan Reynolds (disingkat Re), yang sebenarnya telah disusun sebagai perbandingan :

$$\frac{\text{perbandingan momentum secara}}{\text{konveksi gesekan dalam}} = \frac{\rho v_0 v_0}{\mu v_0 / d} = \frac{\rho v_0 d}{\mu}$$

Dari contoh ini dapat dilihat bahwa banyaknya perubah yang semula lima berkurang menjadi dua. Hal ini akan sangat mempermudah pembuatan grafik dari hasil percobaan, yang dilakukan untuk menentukan bentuk fungsi ϕ .



Gambar 5.10. sudut suatu aliran

Contoh 3.b.

SOAL

Sebuah takik berbentuk V sering kali dipakai untuk mengukur laju alir Q suatu cairan dalam aliran terbuka. Untuk takik yang bersudut 60° telah diketahui untuk alir, bahwa laju alir besarnya 20 liter/detik, jika tinggi H itu 25 cm. Alat yang sama akan dipakai untuk mengukur laju alir minyak dengan kekentalan kinematis ($\nu = \mu/\rho$) yang besarnya 10 kali ν alir. perkirakan suatu titik peneraan untuk aliran minyak dari ketentuan untuk aliran air.

Soal ini dapat diselesaikan dengan analisa dimensi, asalkan kedua aliran itu sama sifatnya, misalnya keduanya berlapis. Dari keterangan untuk aliran air harus disusun sebuah persamaan tanpa dimensi, yang juga berlaku untuk aliran minyak karena kedua aliran mempunyai kesamaan dimensi, yaitu : geometri dan sifat kedua aliran sama.

ANALISA

Q diperkirakan bergantung pada : H , ρ , g dan μ . Jadi ada 5 peubah yang dapat diinyatakan dengan 3 dimensi baku : m , L , t .

$$Q = L^3 t^{-1}$$

$$H = L$$

$$g = L t^{-2}$$

$$\rho = m L^{-3}$$

$$\mu = m L^{-1} t^{-1}$$

Dari kelima peubah itu harus disusun dua kelompok tanpa dimensi. Kita pilih kelompok-kelompok yang berikut :

$$\begin{aligned} \text{(I)} \quad &= \frac{Q}{\frac{H^3}{g^c}} \quad \left. \begin{array}{l} a = 2,5 \\ b = 0 \\ c = 0,5 \end{array} \right\} \quad \text{(I)} = \frac{Q}{H^{2,5} g^{0,5}} \\ \text{(II)} \quad &= \frac{Q}{\frac{H^3}{g^c}} \quad \left. \begin{array}{l} a = 1,5 \\ b = 0 \\ c = 0,5 \end{array} \right\} \quad \text{(II)} = \frac{\mu}{H^{1,5} \rho g^{0,5}} \end{aligned}$$

Dari aliran air diketahui, bahwa

$$\frac{Q}{H^{2,5} g^{0,5}} = \phi \left(\frac{\mu}{H^{1,5} \rho g^{0,5}} \right), \text{ untuk } Q = 20 \text{ l/det}$$

$$H = 25 \text{ cm}$$

RENCANA

Persamaan diatas harus dibuat berlaku untuk minyak. Pada nilai bilangan I dan bilangan II yang sama persamaan itu berlaku untuk semua sistem yang serupa dimensinya. Rencana pemecahannya adalah sebagai berikut.

Harga v untuk minyak disubstitusikan ke dalam bilangan II. Nilai H diubah sehingga nilai II tetap sama seperti semula. Nilai H untuk minyak disubstitusikan kedalam bilangan I, dan Q diubah supaya nilai bilangan I tetap. Inilah Q untuk minyak.

PENYELESAIAN

Untuk memberi nilai bilangan tanpa dimensi, diperlukan penggunaan satuan yang tetap, misalnya $L = \text{cm}$, $m = \text{gram}$, $t = \text{detik}$.

Kalau (II) diberi nilai untuk aliran minyak, maka pembilang $\left(\frac{\mu}{\rho}\right)$ menjadi 10 kali lebih besar. Supaya (II) mempunyai nilai yang sama dengan nilai untuk aliran air, maka penyebut juga harus 10 kali lebih besar.

$$\frac{1}{(25)^{1,5}} = \frac{10}{(H_2)^{1,5}} \rightarrow H_2 = 116 \text{ cm.}$$

Nilai H_2 sekarang disubstitusikan ke dalam (I), yang juga harus mempunyai nilai yang sama dengan nilai untuk aliran air.

$$\frac{20}{(25)^{2,5}} = \frac{Q_2}{(116)^{2,5}} \rightarrow Q_2 = 928 \text{ l/dt.}$$

CATATAN

Aliran minyak akan mempunyai laju alir sebesar 928 l/detik, jika H sama dengan 116 cm.

Dalam dua hal pengertian dimensi mendapat penggunaan yang penting.

1. Dimensi dapat dipakai untuk memeriksa kebenaran suatu persamaan. Suatu persamaan harus mempunyai dimensi yang homogen : semua suku diruas kiri dan semua suku diruas kanan harus mempunyai dimensi yang sama. Karena itu setiap kali disusun suatu persamaan, kehomogenan dimensinya harus diperiksa.
2. Penggunaan dimensi dalam analisa dimensi dan persamaan tanpa dimensi. Hal ini akan dijelaskan lebih lanjut dibawah ini.

Dalam operasi teknik kimia banyak digunakan persamaan-persamaan tanpa dimensi yang diperoleh dari hasil percobaan. Untuk memberikan kepada persamaan-persamaan itu bentuk yang lebih sesuai dengan pemikiran teori maka kadang-kadang diadakan penyesuaian berdasarkan hasil analisa dengan neraca mikro. Jalan lain dapat juga ditempuh, yaitu hasil analisa dengan neraca mikro dapat dituangkan dalam persamaan tanpa dimensi. kemudian semua tetapan dapat diberi nilai dengan menggunakan data hasil percobaan.

Dalam contoh 3.a diatas dapat diadakan pemikiran lebih lanjut berdasarkan pengalaman percobaan. Dalam percobaan dengan bola diperoleh pengalaman, bahwa pada kecepatan alir fluida yang sangat rendah, gaya F pada bola tidak tergantung pada densiti fluuida. Jadi dalam persamaan (5.34) eksponen untuk ρ mempunyai harga 0, atau

$$q = 0 = s - 1 \rightarrow s = 1$$

Dengan demikian persamaan akhir, yang berlaku untuk aliran yang sangat rendah, ialah :

$$\frac{\rho F}{\mu^2} = \frac{\rho v_0 d}{\mu}, \text{ tetapan}$$

Atau
$$\frac{F}{\mu v_0 d} = \text{tetapan}$$

Dengan menggunakan penelaahan menurut teori Stokes dapat menurunkan, bahwa

$$F = 3\pi\mu v_0 d$$

Yang terkenal dengan nama Hukum Stokes. Hukum Stokes ini berlaku untuk aliran yang sangat rendah: $Re < 0,1$, dalam hal partikel yang jatuh dengan kecepatan akhir yang tetap.

Contoh ini dengan jelas menunjukkan adanya hubungan antara kebiasaan-kebiasaan dalam operasi teknik kimia dan analisis berdasarkan teori, yang digunakan dalam peristiwa perpindahan. Perlu diterangkan, bahwa setiap kali digunakan bilangan Re untuk suatu sistem, maka untuk d harus diambil ukuran panjang yang menjadi ciri sistem itu. Untuk bola diambil $d =$ diameter bola, untuk aliran dalam pipa $d =$ diameter-dalam pipa, dst. Karena itu nilai bilangan Re hanya dapat dibandingkan untuk sistem-sistem yang sejenis.

Nilai $Re = 0$ berarti tidak ada aliran. Kalau kecepatan alir bertambah besar, maka nilai Re akan naik, sebab untuk satu fluida yang mengalir dalam satu sistem ρ , μ dan d akan tetap. Jika kecepatan bertambah terus, sifat aliran akan berubah dari berlapis ke bergolak melalui suatu daerah peralihan. Berakhirnya aliran berlapis selalu terjadi pada nilai Re yang sama. Bermulanya aliran bergolak juga terjadi pada nilai Re yang tetap. Dalam daerah peralihan aliran tidak menunjukkan sifat yang mantap, kadang-kadang berlapis, kadang-kadang bergolak.

Kalau suatu cairan di alirkan dalam pipa dari berbagai diameter, maka untuk mencapai nilai Re yang sama, kecepatan dalam pipa yang kecil harus lebih besar dari pada kecepatan dalam pipa yang lebih besar. Sehingga pada umumnya aliran dalam pipa yang besar lebih cepat menjadi bergolak dari pada dalam pipa yang kecil. Begitu pula kalau dalam satu pipa dialirkan cairan dari berbagai densiti, maka cairan dengan densiti yang lebih besar akan lebih cepat menjadi bergolak, artinya cairan itu mulai mengalir secara bergolak pada kecepatan yang lebih rendah. Sebaliknya cairan dengan kekentalan yang lebih besar, akan lebih lama mempertahankan sifat berlapisnya.

SOAL-SOAL

1. Dua buah bola, yang berbeda beratnya akan tetapi sama diameternya, jatuh secara bebas tanpa hambatan. Bagaimanakah perbandingan kecepatan akhir kedua bola itu?

Jawab : $v_1 = v_2$

2. Dua buah bola, yang sama beratnya akan tetapi diameternya berbanding seperti $d_1/d_2 = 1/2$, jatuh secara bebas tanpa hambatan. Bagaimanakah perbandingan kecepatan akhir kedua bola itu ?

Jawab : $v_1/v_2 = 2$

- 3a. Dalam percobaan dengan sebuah reaktor yang berbentuk silinder, dengan

volum 1 liter, diameter 10 cm, telah dicapai pengadukan yang cukup baik dengan sebuah pengaduk, diameter 3 cm, pada 250 putaran per menit (ppm). Dikehendaki untuk melakukan percobaan yang serupa dengan reaktor bervolum 10 liter, sehingga tercapai taraf pengadukan yang sama. Untuk pelaksanaan percobaan itu, buatlah usul tentang ukuran dan reaktor pengaduk, serta kecepatan perputaran pengaduk.

Jawab : reaktor baru, diameter = 21,6 cm

$$\begin{aligned} \text{Tinggi} &= 27,5 \text{ cm} \\ \text{Pengaduk, diameter} &= 6,5 \text{ cm} \\ \text{Perputaran} &= 53 \text{ ppm} \end{aligned}$$

4. Pada ujung sebuah pipa kaca sedang terbentuk, tetes-tetes tunggal cairan, yang kemudian lepas dan jatuh. Jika diameter tetes pada waktu lepas disebut diameter kritis, carilah suatu persamaan tanpa dimensi yang dapat dipakai untuk memperkirakan diameter kritis tetes.

Jawab :
$$\frac{\rho g d^3 k r}{\sigma d_{\text{pipa}}} = 6$$

5. Gunakan hasil soal nomor 4 diatas untuk memperkirakan diameter kritis tetes air, yang terbentuk pada ujung pipa kapilar dengan diameter-luar 2 mm.

Jawab : $d = 4,4 \text{ mm}$

- 6a. Carilah hubungan antara besarnya gaya, yang diberikan oleh aliran kepada

dinding pipa, dan sifat-sifat aliran. Dinding pipa dianggap licin. Ingat, bahwa gaya itu sama dengan $\tau_w \times$ luas permukaan dinding pipa.

Jawab :
$$\frac{F_p}{\mu^2} = \phi \left(\frac{\rho v d L}{\mu}, D \right)$$

- 7a. Tunjukkan, bahwa daya D yang diperlukan untuk memutar sebuah

pengaduk (diameter d) dengan kecepatan putar n (det^{-1}) dalam fluida dengan densiti ρ dan kekentalan μ , dapat dinyatakan dengan persamaan yang berikut :

Jawab :
$$\frac{D}{\rho n^3 d^5} = \phi \left(\frac{\rho n d^2}{\mu}, \frac{n^2 d}{g} \right)$$

2. ALIRAN DALAM PIPA

Dalam teknik banyak dijumpai aliran dalam pipa. Pada bagian 1 contoh a, untuk aliran berlapis dalam pipa telah diperoleh penyebaran kecepatan yang berikut :

$$v_z = \frac{(P_o - P_L) R^2}{4 \mu L} \left\{ 1 - \left(\frac{r}{R} \right)^2 \right\} \quad (5-24)$$

Aliran dalam pipa akan menimbulkan gaya yang bekerja pada permukaan padatan, yaitu dinding pipa sebelah dalam. Gaya itu dapat dibedakan dalam dua jenis. Yang satu F_s adalah gaya STATIS, yang juga akan diterima oleh dinding pipa kalau fluida itu tidak mengalir. Yang lain adalah gaya tambahan F_k yang ditimbulkan oleh GERAKAN fluida, yaitu TEGANGAN GESER.

Arah F_k sama dengan arah kecepatan alir dan dikenal sebagai akibat dari ENERGI KINETIS. F_k dapat diartikan sebagai hasil perkalian suatu luas A , sejumlah energi kinetis per satuan volum K dan suatu bilangan tak berdimensi f , yang disebut FAKTOR GESEKAN, sehingga dapat ditulis :

$$F_k = AKf \quad (5-35)$$

Periksalah dimensi persamaan (5-35)

Persamaan (5-35) bukanlah sebuah hukum, akan tetapi hanya merupakan definisi untuk f , A dan K mempunyai sifat khusus yang berhubungan dengan sistem, dan karena itu sebelum A dan K ditetapkan, maka f belum didefinisikan secara jelas. Dalam menetapkan A dan K harus dijaga agar persamaan (5-35) tetap mempunyai definisi yang homogen.

Dalam hal aliran dalam saluran biasanya untuk A diambil permukaan yang dibasahi dan untuk K diambil $\frac{1}{2}\rho \langle v^2 \rangle$. Untuk pipa dengan diameter R dan panjang L didapat :

$$F_k = (2\pi RL) \left[\frac{1}{2}\rho \langle v^2 \rangle \right] f \quad (5-36)$$

Biasanya yang diukur bukan F_k , akan tetapi selisih tekanan $P_o - P_L$ dan selisih tinggi permukaan cairan $h_o - h_L$. Kalau dibuat suatu neraca gaya pada fluida dalam pipa itu antara 0 dan L , maka untuk aliran yang sudah berkembang sepenuhnya dalam pipa datar di dapat :

$$F_k = \{(P_o - P_L) + \rho g(h_o - h_L)\} \pi R^2 = (P_o - P_L) \pi R^2 \quad (5-37)$$

Eliminasi F_k antara persamaan (5-36) dan (5-37) menghasilkan :

$$f = \frac{1}{4} \frac{d}{L} \left(\frac{P_o - P_L}{\frac{1}{2}\rho \langle v^2 \rangle} \right) \quad (5-38)$$

f dalam bentuk diatas disebut FAKTOR GESEKAN FANNING. Persamaan (5-38) menunjukkan bagaimana f dapat dihitung dari data yang diperoleh dari percobaan.

Jika digunakan penyebaran kecepatan untuk aliran berlapis (pers. 5-24), maka penerapan persamaan (5-17) untuk $\langle v_z \rangle$ memberikan :

$$\langle v_z \rangle = \frac{(P_o - P_L)R^2}{8\mu L}$$

Kalau v_z dipakai untuk mengeliminasi $(P_o - P_L)$ dari persamaan (5-38) akan didapat :

$$f = 16 \left(\frac{\mu}{\rho \langle v \rangle d} \right)$$

Atau

$$f = \frac{16}{Re}$$

Pengalaman menunjukkan, bahwa persamaan (5-39) memang berlaku dalam praktek operasi teknik kimia. Dengan demikian faktor gesekan untuk aliran berlapis dapat dihitung. Jika

diketahui bilangan reynoldsnya. Cara penentuan faktor gesekan untuk aliran bergolak akan dibicarakan kemudian.

Dari analisa dimensi dapat ditunjukkan, bahwa baik untuk aliran berlapis maupun bergolak, faktor gesekan f merupakan fungsi bilangan Reynolds dan bilangan tak berdimensi $\left(\frac{L}{d}\right)$, yaitu :

$$f = (Re \cdot L/d) \quad (5-40)$$

Grafik hasil percobaan untuk faktor gesekan yang diperoleh dalam operasi teknik kimia memang sesuai dengan persamaan (5-40). Bentuk fungsi ϕ tergantung dari sistem yang sedang menyalurkan aliran. Bentuk Re harus pula disesuaikan dengan sistem.

Tegangan geser yang bekerja pada dinding pipa menimbulkan gesekan pada permukaan itu. Kalau ingin diketahui besarnya tegangan geser pada dinding, maka perlu diketahui lebih dahulu penyebaran τ . Untuk aliran berlapis dalam pipa penyebaran τ telah diturunkan dalam contoh II.2a. yaitu :

$$\tau_{rz} = \frac{(P_o - P_L)}{2L} r$$

Selanjutnya dapat dihitung tegangan geser pada dinding :

$$\tau_w = \tau_{rz}|_{r=R} = \frac{(P_o - P_L)R}{2L}$$

Dan gaya yang bekerja pada seluruh permukaan pipa sepanjang L :

$$F_w = \tau_w \cdot (2\pi RL) = (P_o - P_L)\pi R^2 \quad (5-41)$$

Persamaan (5-41) memperlihatkan, bahwa besarnya gaya pada dinding sama dengan selisih tekanan kali luas penampang, atau selisih gaya antara kedua ujung pipa. Selama mengalir didalam pipa sepanjang L itu, aliran kehilangan gaya sama besar dengan yang digunakan untuk mengatasi gesekan pada dinding.

Gaya itu sebenarnya bukan musnah, akan tetapi berubah menjadi panas yang akan menaikkan entalpi dinding pipa. Kehilangan energi karena gesekan (viscous energy dissipation) tidak hanya terjadi antara fluida dan dinding, akan tetapi juga antara molekul-molekul fluida sendiri. Dalam masalah-masalah aliran dalam saluran pendek kehilangan energi karena gesekan itu kecil sekali, jika dibandingkan dengan perubahan yang lain (tekanan, energi kinetis, tekanan hidrostatik), akan tetapi gesekan bertambah besar jika saluran bertambah panjang.

3. ALIRAN BERGOLAK

Dalam aliran berlapis arah perpindahan momentum dapat diketahui dengan pasti, yaitu tegak lurus pada arah kecepatan linier. Ini disebabkan karena semua kecepatan setempat mempunyai arah yang sama.

Dalam aliran bergolak vektor kecepatan diberbagai bagian aliran tidak lagi searah. Di semua titik, kecuali dekat sekali pada dinding saluran, kecepatan setempat selalu berubah dari saat ke saat. Setiap kecepatan setempat dapat diuraikan dalam tiga suku-urai sesuai dengan sistem sumbu yang digunakan. Dengan demikian tegangan geser dalam aliran bergolak juga berubah-ubah arah.

Tegangan geser dan juga fluksi momentum dapat dibagi menjadi dua jenis. Satu jenis tegangan geser itu ditimbulkan oleh suku kecepatan yang searah dengan arah alir-aliran dan disebut TEGANGAN GESER ALIRAN BERLAPIS. Salah satu persamaan Newton yang berhubungan dengan ini sudah dikenal lebih dahulu (persamaan 5.1). sebenarnya semuanya ada 9 persamaan, masing-masing untuk satu suku-tensor.

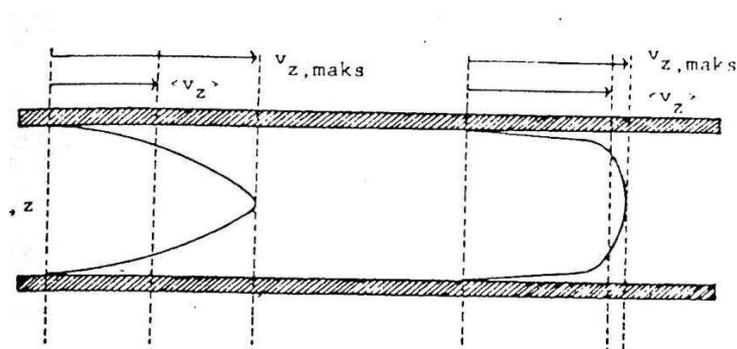
Selain tegangan geser aliran berlapis itu ada lagi tegangan geser yang ditimbulkan oleh suku kecepatan kedua arah sumbu yang lain. Tegangan geser ini disebut TEGANGAN GESER ALIRAN BERGOLAK. Menganalisa tegangan geseran aliran bergolak sampai sekarang menemui kesukaran-kesukaranyang belum semuanya dapat diatasi.sekarang dikenal berbagai persamaan untuk itu, yang semuanya diperoleh dari pengalaman percobaan (persamaan empiris).

Untuk memperoleh fungsi penyebaran kecepatan dalam aliran bergolak tidak dapat ditempuh jalan analisa lengkap, akan tetapi terpaksa juga digunakan persamaan hasil percobaan diatas. Dari hasil analisa dapat diperoleh penyebaran kecepatan untuk ALIRAN BERLAPIS DALAM PIPA :

$$\frac{v_z}{v_{z,\text{maks}}} = \left\{1 - \left(\frac{r}{R}\right)^2\right\}; \quad \frac{\langle v_z \rangle}{v_{z,\text{maks}}} = \frac{1}{2} \quad (5-42)$$

Untuk aliran bergolak dalam pipa maka dari HASIL PERCOBAAN telah didapat penyebaran kecepatan SECARA KASAR yang berlaku HANYA untuk bilangan Reynolds antara 10.000 dan 100.000.

Perbandingan penyebaran kecepatan dalam aliran berlapis dan bergolak dalam pipa dapat dilihat pada gambar berikut



Gambar 5.11. Penyebaran kecepatan aliran berlapis dan bergolak dalam pipa

Gejolak kecepatan yang meninggalkan arah alir utama,juga disebut turbulensi, berkurang jika semakin mendekati dinding. Hal ini menjadi sebab timbulnya teori lapisan batas yang berlapis. Teori ini mengemukakan, bahwa dari aliran bergolak bagian yang dekat dinding merupakan lapisan tipis yang mengalir secara berlapis. Dapat dimisalkan, bahwa ada bagian setebal δ yang mengalir secara berlapis dan mempunyai gradien kecepatan yang tetap, berbatasan dengan bagian yang mengalir secara bergolak dan mempunyai gradien kecepatan yang besarnya hampir nol.

Besarnya tegangan geser pada dinding ialah :

$$\tau_w = -\mu \left. \frac{dv_z}{dr} \right|_{r=R} = \mu \frac{\langle v_z \rangle}{\delta}$$

Jika besarnya faktor gesekan f diketahui, maka untuk aliran dalam pipa δ dapat diperkirakan dari persamaan hasil analisa dimensi yang berikut :

$$\tau_w = f \cdot \frac{1}{2} \rho \cdot \langle v_z \rangle^2 = \mu \frac{\langle v_z \rangle}{\delta}$$

Untuk aliran berlapis DALAM PIPA telah diketahui dari pengamatan percobaan, bahwa hubungan f dan bilangan Reynolds $f = \frac{16}{Re}$, hanya berlaku sampai bilangan Reynolds 2100. Ini berarti bahwa aliran dalam pipa, yang mempunyai bilangan $Re < 2100$, selalu berlapis. Jadi bilangan Reynolds dapat dipakai sebagai petunjuk tentang sifat aliran. Ingat, bahwa batas $Re = 2100$ hanya berlaku untuk ALIRAN DALAM PIPA

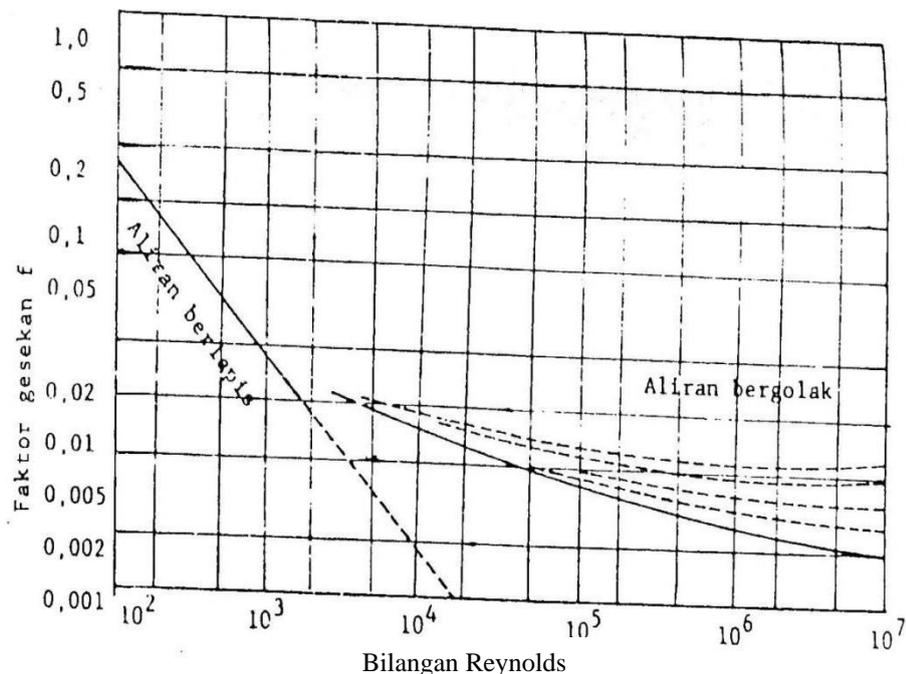
Untuk bilangan Reynolds yang lebih dari 2100 sampai kira-kira 4000 terdapat daerah peralihan yang memperlihatkan sifat kecepatan yang tidak mantap. Dalam daerah peralihan aliran kadang-kadang bersifat berlapis, kadang-kadang bergolak. Untuk aliran bergolak telah diperoleh harga-harga faktor gesekan, yang dengan menggunakan persamaan (5.43) dapat diubah menjadi rumus Blasius (5.44). Maka didapat hubungan-hubungan yang berikut :

$$f = \frac{16}{Re}; Re < 2100 \quad \text{mantap} \quad (5-39)$$

.....; $2100 < Re \leq 4000$ tak mantap

$$f = \frac{0.0791}{Re^{1/4}}; 4000 < Re < 100.000 \text{pekiraan} \quad (5-44)$$

Untuk harga bilangan Reynolds lebih dari 100.000 tidak dapat dipakai rumus, tetapi harus digunakan data percobaan seperti pada gambar diatas



Gambar 5.12. Hubungan f dan Re dalam aliran pipa

4. SELISIH TEKANAN ALIRAN DALAM PIPA

Perhitungan selisih tekanan dalam pipa yang lurus untuk aliran berlapis, dapat dilakukan dengan mudah dengan menurunkan persamaannya dari persamaan penyebaran kecepatan (persamaan 5-24). penurunan itu akan menghasilkan persamaan untuk laju alir Q.

Persamaan ini terkenal sebagai HUKUM HAGEN-POISEUILLE. Menurut nama kedua orang ilmuwan yang berhasil menyusunnya untuk pertama kali. Persamaan (5-45) menyatakan hubungan antara laju alir Q, ukuran pipa $(P_o - P_L) = (P_o - P_L) + \rho g(z_o - z_L)$. Kesemua besaran ini dapat diukur karena dalam penurunan persamaan (4-45) gesekan tidak diperhitungkan, maka hukum Hagen - Poiseuille hanya berlaku untuk saluran yang pendek dimana gesekan dapat diabaikan. Jika diketahui Q maka persamaan (5-45) dapat dipakai untuk memperkirakan selisih tekanan dalam pipa lurus. Cara ini tidak dapat dipergunakan dalam suatu sistem perpipaan. Yang membuat berbagai jenis sambungan dan yang menjadi rumit jika dikerjakan secara matematis meliputi tiga arah dalam sistem sumbu.

BERNOULLI Telah menyelesaikan masalah ini dengan menurunkan suatu persamaan dari neaca momentum, yang sebenarnya adalah suatu ^{NERACA ENERGI MEKANIS}. Persamaan itu disebut PERSAMAAN BERNOULLI, dan dapat diterapkan pada bagian pipa antara penampang 1 dan 2.

$$\int_1^2 \frac{dp}{\rho} + g(h_1 - h_2) + \frac{1}{2}(v_2^2 - v_1^2) + G = 0 \quad (5-46)$$

Dimana G = laju alir massa

Dalam bentuk aslinya seperti diatas persamaan Bernoulli berlaku untuk fluida yang tidak menunjukkan gesekan antara molekul-molekulnya. Untuk keperluan penggunaan dalam teknik persamaan (5-46) diperluas hingga dapat dipakai untuk fluida yang mempunyai viskositas, menjadi :

$$\int_1^2 \frac{dp}{\rho} + g(h_1 - h_2) + \frac{1}{2}(v_2^2 - v_1^2) + \bar{w} + \bar{E} = 0 \quad (5-47)$$

Dimana :

W = usaha mekanis yang diberikan oleh fluida PERSATUAN MASSA kepada kelilingnya.

E = energi mekanis PERSATUAN MASSA yang diubah menjadi panas karena gesekan molekul.

Persamaan (5-47) seringkali juga disebut persamaan Bernoulli yang diperluas. Bentuk integral dalam persamaan (5-47) dapat dihitung kalau diketahui persamaan-keadaan fluida itu. Jadi kalau diketahui ρ sebagai fungsi p atau sebaliknya. Dalam perhitungan sering dipakai anggapan, bahwa fluida itu memenuhi salah satu dari keadaan batas yang berikut :

Gas ideal pada temperatur tetap :

$$\int_1^2 \frac{1}{\rho} dp = \int_1^2 \frac{RT}{Mp} dp = \frac{RT}{M} \ln \frac{P_2}{P_1}$$

Fluida yang tak termampatkan :

$$\int_1^2 \frac{1}{\rho} dp = \frac{1}{\rho} (P_2 - P_1)$$

Besarnya E tidak dapat dihitung, akan tetapi harus ditetapkan dengan percobaan. Sekarang terdapat banyak daftar atau grafik untuk memperkirakan RUGI-GESEKAN E. Karena rugi-gesekan itu besarnya tergantung pada kecepatan, maka E dapat dinyatakan sebagai fungsi energi kinetis $\frac{1}{2} \langle v \rangle^2$. Dalam hal ini ada dua perumusan. Untuk bagian PIPA YANG LURUS dipakai :

$$\bar{E} = \frac{1}{2} \langle v \rangle^2 \cdot \frac{L}{R_h} f \quad (5-48)$$

L adalah panjang pipa, f faktor gesekan dan R_h jari-jari hidrolis yang diberi definisi sebagai berikut :

$$R_h = \frac{\text{LUAS PENAMPANG}}{\text{KELILING YANG TERBASAH}}$$

Untuk BELOKAN, SAMBUNGAN PIPA DAN KATUP digunakan :

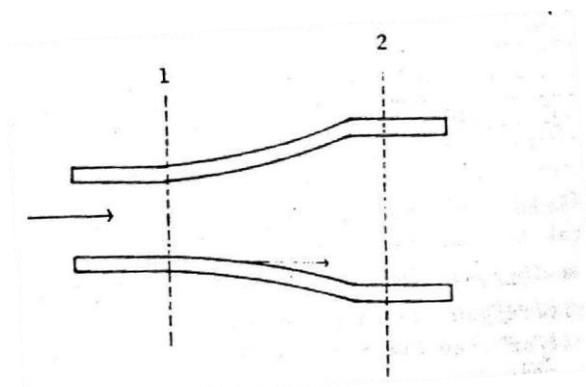
$$\bar{E} = \frac{1}{2} \langle v \rangle^2 \cdot e_v \quad (5-49)$$

e_v disebut vaktor rugi-gesekan dan untuk aliran bergolok dapat dipekirakan dari daftar yang dimuat sebagai lampiran.

5. ALIRAN DALAM SALURAN DENGAN LUAS PENAMPANG YANG BERUBAH

Dalam tangki kimia sering dihadapi aliran dalam saluran yang luas penampangnya tidak tetap. Saluran itu mungkin bagian dari alat sebuah alat itu sendiri. Untuk penyelesaian soal-soal semacam ini tersedia tiga buah persamaan.

Dibawah ini ketiga persamaan itu akan dibahas untuk keadaan mantap. Jadi tidak akan ada akumulasi. Cairan yang ditinjau tidak termanfaatkan, dengan ρ atau μ tetap.



Gambar 5.13. saluran dengan luas penampang yang berubah

Perhatikan gambar diatas. petama-tama dapat digunakan : NERACA MASSA : $\rho \langle v_1 \rangle A_1 = \rho \langle v_2 \rangle A_2$.

Kalau laju alir massa disebut G, maka :

$$G = \rho \langle v_1 \rangle A_1 = \rho \langle v_2 \rangle A_2$$

Kemudian dapat dipakai NERACA MOMENTUM untuk keadaan mantap. Yang dapat diturunkan dengan menggunakan persamaan (I) untuk perpindahan momentum.

Seperti pada neraca massa diatas, yang digunakan sebagai volum-banding ialah bagian alat itu terletak antara penampang 1 dan 2. Cara kerja ini disebut pembuatan neraca secara makro.

Dalam hal ini momentum yang ditinjau ialah momentum yang berpindah secara konveksi, $\rho v v$ dan gaya-gaya yang bekerja ialah tekanan. Gravitasi dan gaya F oleh permukaan padat terhadap fluida. Yang terakhir ini adalah gaya reaksi terhadap gaya gesekan fluida $-F_k$ pada permukaan padat. Tanda kurang untuk F_k ialah karena F_k keluar dari sistem.

Maka neraca momentum itu dapat ditulis sebagai berikut :

$$0 = p \langle v_1 \rangle^2 A_1 - p \langle v_2 \rangle^2 A_2 + P_1 A_1 - P_2 A_2 + m_t g + F \quad (5-50)$$

Jika m_t adalah massa total yang ada dalam volum-banding itu. Persamaan ketiga yang dapat digunakan adalah PERSAMAAN YANG DIPERLUAS :

$$\int_1^2 \frac{1}{\rho} dp + g(h_2 - h_1) + \frac{1}{2}(\langle v_2 \rangle^2 - \langle v_1 \rangle^2) + \bar{w} + \bar{E} = 0 \quad (5-47)$$

Yang berlaku untuk satu satuan massa. Untuk mendapatkan harga keseluruhannya, tiap besaran harus dikalikan dengan G.

Untuk saluran yang DATAR atau PENDEK pengaruh gravitasi dapat diabaikan, sehingga persamaan (5.50) menjadi :

$$-F = \rho \langle v_1 \rangle^2 A_1 - \rho \langle v_2 \rangle^2 A_2 + p_1 A_1 - p_2 A_2$$

Untuk saluran DATAR atau TANPA PENGGUNA ENERGI persamaan (5-47) menjadi :

$$\int_1^2 \frac{1}{\rho} dp + \frac{1}{2}(\langle v_2 \rangle^2 - \langle v_1 \rangle^2) + \bar{E} = 0$$

Penerapan persamaan-persamaan itu akan dijelaskan dalam contoh-contoh dibawah ini.

a. Pipa lurus

Jika luas penampang dikedua ujung sama, maka $A_1 = A_2$ dan neraca massa menjadi :

$$\langle v_1 \rangle = \langle v_2 \rangle$$

Neraca momentum menjadi :

$$F = - (p_1 - p_2) A$$

Karena cairan hanya memberi gaya berupa tegangan geser pada dinding pipa, maka :

$$F = - F_K = - \tau_w \cdot SL \quad (5-51)$$

Jika S adalah keliling penampang pipa dan L panjang pipa. Berdasarkan persamaan (5-36)

$$F = - f (SL)^{1/2} \cdot \rho \langle v \rangle^2 \quad (5-52)$$

Dalam hal ini perlu diadakan pembedaan yang jelas antara F_k dari persamaan (5-36) yaitu gaya yang diberikan OLEH CAIRAN terhadap permukaan padat, dan F dari persamaan (5-51) dan

(5-52) yaitu gaya yang diberikan OLEH PERMUKAAN PADAT terhadap cairan . F_k searah dengan τ_w dan searah dengan energi kinetis, sedang F berlawanan arahnya. Berdasarkan hukum aksi reaksi, maka :

$$F_k = - F$$

Jika F dihilangkan dari persamaan (5-51) dan (5-52) dan di gunakan juga persamaan (5-47) , diperoleh :

$$\tau_w \cdot SL = f (SL)^{1/2} \rho \langle v \rangle^2 = (p_1 - p_2) A$$

$$\frac{p_1 - p_2}{\rho} = f^{1/2} \langle v \rangle^2 \frac{SL}{A}$$

Untuk pipa lurus persamaan Bernoulli menjadi

$$\frac{1}{\rho} (P_2 - P_1) + \bar{E} = 0$$

$$\bar{E} = \frac{P_1 - P_2}{\rho} = f^{1/2} \langle v \rangle^2 \frac{SL}{A} \quad (5-53)$$

Kalau diingat, bahwa $A = R_h$, maka persamaan (5-53) itu adalah titik lain dari pada rugi-gesakan

untuk pipa lurus, persamaan (5-49) maka dapat ditulis, bahwa untuk pipa lurus :

$$ev = f \frac{SL}{A}$$

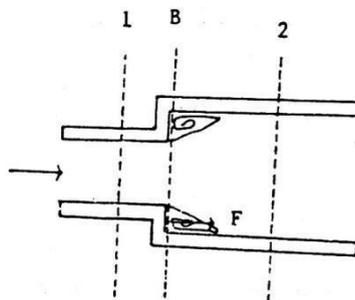
Dari contoh ini menjadi jelas bahwa dengan menggunakan ketiga persamaan :

- Neaca massa
- Nerca momentum secara makro
- Persamaan Benoulli yang diperluas

Dapat dipekirakan besarnya rugi-gesakan E , asal dapat ditemukan pernyataan tentang BESARNYA GAYA yang diberikan OLEH CAIRAN terhadap permukaan padat. Pernyataan tentang besarnya gaya itu dapat disusun dari keterangan, bahwa besarnya gaya itu sama dengan tegangan geser pada dinding, τ_w , dikalikan dengna luas permukaan dinding.

b. Pelebaran mendadak

Dalam hal pelebaran mendadak seperti yang digambarkan oleh Gambar berikut, akan terjadi gejolak-gejolak yang akan memperbesar rugi-gesakan.



Gambar 5.14. Pelebaran mendadak pada pipa

Untuk keadaan mantap neraca massa adalah :

$$\rho < v_1 > A_1 = \rho < v_2 > A_2$$

$$< v_2 > = \frac{A_1}{A_2} < v_1 > = \frac{1}{\beta} < v_1 > \quad (5-54)$$

Dan neraca momentum :

$$-F = \rho < v_1 >^2 A_1 - < v_2 >^2 A_2 + p_1 A_1 - p_2 A_2 \quad (5-55)$$

Besarnya F dapat diperkirakan, kalau gesekan pada dinding diabaikan dan tekanan segera sesudah pelebaran (pada bidang B) dianggap sama besar dengan tekanan di bidang "I". Besarnya F itu akan sama dengan tekanan kali selisih luas permukaan.

$$-F = -P_1(A_2 - A_1)$$

Yang dengan persamaan (5.54) dan (5.55) menghasilkan :

$$\frac{P_2 - P_1}{\rho} = < v_2 >^2 \left(\frac{1}{\beta} - 1 \right) \quad (5-56)$$

Persamaan bernouli untuk pelebaran mendadak dapat ditulis sebagai berikut :

$$\frac{1}{\rho} (P_2 - P_1) + \frac{1}{2} (< v_2 >^2 - < v_1 >^2) + \bar{E} = 0 \quad (5-57)$$

Dengan memasukkan persamaan (5-56) kedalam persamaan (5-57) dan lagi menggunakan persamaan (5-54) diperoleh :

$$\bar{E} = \frac{1}{2} < v_2 >^2 \left(\frac{1}{\beta} - 1 \right)^2 \quad (5-58)$$

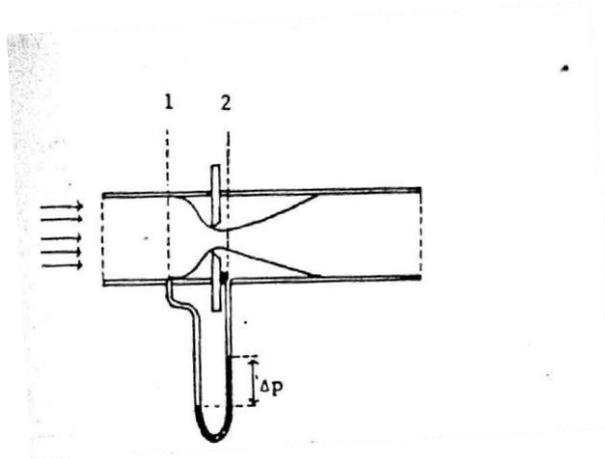
Persamaan (5-58) sesuai dengan hasil percobaan. Kalau diperhatikan, bahwa $\beta < 1$, maka $\frac{1}{\beta} > 1$ dan $\frac{1}{\beta} - 1 = 0$, sehingga persamaan (5-56) memberi kesimpulan :

$$P_2 - P_1 > 0$$

Yang berarti : sesudah pelebaran mendadak ada kenaikan tekanan.

c. Aliran cairan melalui orifis.

Sebuah orifis adalah sebuah lubang pada sebuah lempeng, yang dipasang tegaklurus pada arah alir didalam pipa. Selisih tekanan yang timbul digunakan untuk mengukur besarnya aliran yang lewat.



Gambar 5.15. Aliran lewat orifis

Pada lubang irifis luas penampang mendadak menjadi kecil dan energi kinetis menjadi besar. Sesudah lewat lubang luas penampang lebih dahulu mengecil untuk segera menjadi besar dan akhirnya memenuhi pipa. Tempat segera sesudah lubang dengan luas penampang terkecil disebut VENA CONTRACTA.

Segera sesudah orifis aliran “terlepas” dari dinding dan ditempat itu terjadi banyak gejolak, yang menyebabkan banyak energi yang hilang. Ditempat ini tekanan turun terhadap tempat sebelum orifis.

Untuk keadaan mantap neraca massa menghasilkan (lihat Gambar diatas).

$$\rho < v_1 > A_1 = \rho < v_2 > A_2$$

karena $A_1 = A_2$, maka $< v_1 > = < v_2 >$

Persamaan bernoulli memberikan :

$$\frac{1}{\rho} (P_2 - P_1) + \frac{1}{a_2} \frac{1}{2} < v_2 >^2 - \frac{1}{a_1} \frac{1}{2} < v_1 >^2 + \frac{1}{2} < v_2 >^2 e_v = 0$$

$$v_2 = \sqrt{\frac{\frac{2}{\rho} (P_2 - P_1)}{\frac{1}{a_2} - \frac{1}{a_1} + e_v}}$$

$$G = \rho < v > v = v \sqrt{\rho \frac{2(P_2 - P_1)}{\frac{1}{a_2} - \frac{1}{a_1} + e_v}} \quad (5-59)$$

a_2 dan a_1 adalah faktor-faktor koreksi, karena sebenarnya $< v_2 >^2$ dan $< v_1 >^2$ adalah penyederhanaan dari :

$$\frac{\frac{1}{2} < v_2^3 >}{< v_2 >} da \quad \frac{\frac{1}{2} < v_1^3 >}{< v_1 >}$$

Selanjutnya dianggap :

$$e_v = 0$$

$$a_1 = 1$$

$$a_2 = \left(\frac{A_0}{A}\right)^2$$

Dalam mana A_0 adalah luas penampang lubang orifis.

Persamaan (5-59) menjadi :

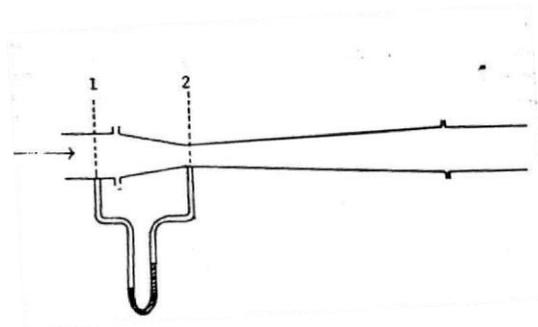
$$G = A \sqrt{\frac{2\rho(P_2 - P_1)}{1 - \left(\frac{A_0}{A}\right)^2}}$$

Untuk mengimbangi kesalahan-kesalahan yang telah dibuat dalam ketiga anggapan diatas, maka dalam teknik biasa ditambahkan satu koefisien-buang, yaitu C_d :

$$G = C_d A \sqrt{\frac{2\rho(P_2 - P_1)}{1 - \left(\frac{A_0}{A}\right)^2}} \quad (5-60)$$

d. Tabung Venturi

Dalam tabung Venturi atau Venturi tube perubahan diameter dibuat Lambat laun supaya aliran dalam mengikuti batas pipa tanpa menimbulkan gejolak, yang akan memperkecil energi yang hilang.



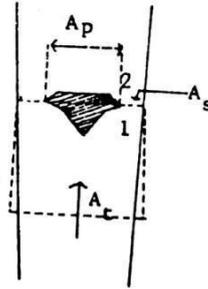
Gambar 5.16. Tabung Venturi

Biasanya dalam teknik dipakai untuk Tabung Venturi persamaan yang serupa dengan orifisimeter, akan tetapi dengan koefisien-buang yang lain :

$$G_m = C_d A \sqrt{\frac{2\rho(P_2 - P_1)}{1 - \left(\frac{A_0}{A}\right)^2}} \quad (5-61)$$

e. Rotameter.

Sebuah Rotameter ialah alat pengukur aliran, yang terdiri dari sebuah pipa dengan diameter yang mengecil kebawah, dan sebuah pelampung.



Gambar 5.17. Rotameter

Tekanan terhadap sebelah bawah pelampung sepanjang pipa itu tetap P_1 dan tekanan dari atas tetap P_2 , sehingga selisih tekanan melewati pelampung tetap $P_1 - P_2$. Dengan demikian daya terhadap pelampung setimbang dengan berat semu pelampung. Kalau laju alir membesar, pelampung akan didesak keatas sehingga luas penampang anulus sesuai dengan besarnya laju alir. Kesetimbangan dapat ditulis sebagai berikut :

$$F = (P_1 - P_2)A_p$$

$$F = v_p g (\rho_p - \rho_c)$$

$$(P_1 - P_2)A_p = v_p g (\rho_p - \rho_c) \quad (5-62)$$

Jika $A_p =$ luas penampang terbesar pelampung

$v_p =$ volum pelampung

$\rho_p =$ berat jenis pelampung

$\rho_c =$ berat jenis cairan

Kalau persamaan (5-62) disubstitusikan kedalam persamaan orifisimeter (5-60) diperoleh : $G =$

$$C' \frac{\sqrt{\rho_c v_p g (\rho_p - \rho_c)}}{A \left\{ 1 - \frac{A_p^2}{A_t^2} \right\}}$$

Jika $A_s = A_t - A_p$

$A_t =$ luas penampang tabung pada tempat pembacaan.

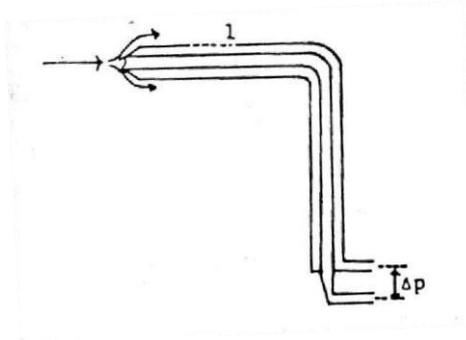
Faktor $\sqrt{\left\{ 1 - \frac{A_p^2}{A_t^2} \right\}}$ biasa disatukan dengan koefisien rotameter C_r .

$$G = C_r \frac{(A_t - A_p) \sqrt{2 \rho_c v_p g (\rho_p - \rho_c)}}{A_p} \quad (5-62)$$

Seperti pada orifisimeter dan Tabung Venturi, koefisien-buang rotameter berubah dengan kecepatan alir dan sifat fluida; lagi pula untuk rotameter tergantung pada bentuk pelampung.

f. Tabung Pitot

Tabung Pitot terdiri dari dua pipa konsentris. Jika mulut tabung dipasang tegak lurus pada arah alir, maka timbul perbedaan tekanan yang menunjukkan besarnya aliran ditempat sekitar mulut tabung.



Gambar 5.18. Tabung Pitot

Mula-mula cairan mengalir masuk mulut tabung Pitot, sampai kenaikan tekanan didalam tabung mengimbangi kecepatan alir cairan. Tepat didepan mulut tabung, cairan itu berhenti mengalir. Tekanan statis pada tempat pengukuran diukur pada lubang lain yang sejajar dengan arah alir.

Penerapan persamaan Bernoulli menghasilkan :

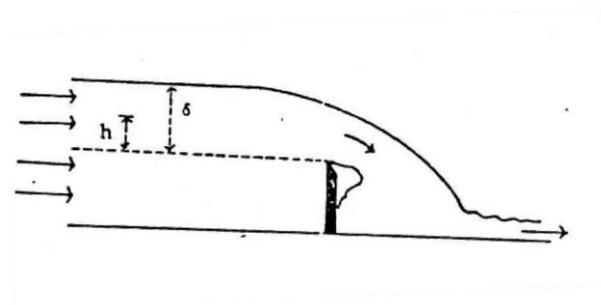
$$\frac{1}{2}(v_2^2 - v_1^2) + \frac{1}{\rho}(P_2 - P_1) + \bar{E} = 0$$

Jika \bar{E} dianggap sebagai sebagian dari suatu tetapan C_p dan $\langle V_2 \rangle$ dinyatakan sebagai perbandingan terhadap $\langle V_1 \rangle$, yang juga ditampung dalam tetapan, maka diperoleh persamaan untuk tabung Pitot :

$$V = C_p \sqrt{\frac{2(P_2 - P_1)}{\rho_c}} \quad (5-63)$$

g. Aliran melalui palang (= weir)

Aliran dalam hal ini dapat dinyatakan sebagai fungsi dari tinggi permukaan cairan diatas bibir palang.



Gambar 5.19. Weir atau palang

Tekanan pada tempat-tempat setinggi h dari bibir palang adalah $P_o + \rho g(\delta - h)$. Jika P_o tekanan sekeliling. Diatas palang cairan mulai mengalir lebih cepat dan tekanan ditempat itu boleh dianggap sama dengan P_o . Lebih ke hulu kecepatan alir tidak seberapa dan untuk mudahnya dapat diabaikan. Dengan anggapan-anggapan ini, penerapan persamaan Benoulli antara suatu tempat disebelah hulu dan tempat diatas palang, keduanya setinggi h , memberikan :

$$\frac{1}{2}(\langle v \rangle_h^2 - \langle v' \rangle^2) + \frac{1}{\rho}(P_o - P_o - \rho g(\delta - h)) = 0$$

Jika v_h = kecepatan alir diatas palang pada $h = h$

v' = kecepatan alir disebelah hulu.

Jika v' diabaikan, akan diperoleh :

$$\langle v_h \rangle = \sqrt{2g(\delta - h)}$$

Yang menunjukkan, bahwa $(v_h) = 0$ pada $h = \delta$ dan (v_h) itu maksimum pada $h = 0$.

Jika lebar panjang itu W , maka besarnya kecepatan alir volum setempat adalah :

$$dQ = v_h W dh$$

Sehingga kecepatan alir keseluruhan menjadi :

$$Q = w \int_0^\delta v dh$$

$$Q = w \cdot \sqrt{2g} \int_0^\delta (\delta - h)^2 dh$$

$$Q = \frac{2}{3} w \sqrt{2g} \delta^3$$

Karena terjadi kontraksi dan rugi-gesekan, maka dipakai rumus praktek.

$$Q = 0.59 \sqrt{2g} \delta^3 \quad (5-64)$$

CONTOH SOAL

SOAL

- a) Turunkan suatu hubungan antara faktor gesekan dan bilangan Reynolds untuk lapisan cairan yang mengalir kebawah secara berlapis pada sebuah dinding tegaklurus.

ANALISA

Karena soal tidak memberikan batas geometri yang jelas, maka batas itu harus ditetapkan lebih dahulu, yaitu seperti pada gambar dibawah ini.

RENCANA

untuk dapat menggunakan persamaan (5-35) perlu diketahui $\langle v_z \rangle$ dan supaya dapat menurunkan persamaan untuk $\langle v_z \rangle$ perlu diketahui penyebaran v_z . karena itu untuk sistem ini harus dibuat NERACA MOMENTUM lebih dulu.

Sebagai volum-banding diambil suatu bagian dengan panjang L, lebar W dan tebal δ dengan sistem koordinat tegaklurus seperti pada gambar. Arah perpindahan momentum adalah kearah y positif.

PENYELESAIAN

$$\text{Neraca Momentum} \quad : (WL\delta) \frac{d(\rho v_z)}{dt} = \tau_{yz}|_{y=0}^{WL} - \tau_{yz}|_{y=\delta}^{WL} + (WL\delta)\rho g$$

$$\text{Dibagi } WL\delta : \frac{d(\rho v_z)}{dt} = \frac{\tau_{yz}|_{y=0} - \tau_{yz}|_{y=\delta}}{\delta} + \rho g$$

δ Dibuat kecil sekali, menjadi dy dan $\tau_{yz}|_{y=0} - \tau_{yz}|_{y=\delta}$ menjadi $-d\tau_{yz}$

$$\frac{d(\rho v_z)}{dt} = -\frac{d\tau_{yz}}{dy} + \rho g$$

Untuk keadaan mantap :

$$\frac{d\tau_{yz}}{dy} = \rho g$$

Diintegrasikan dua kali :

$$\tau_{yz} = \rho g y + C_1$$
$$v_z = -\frac{\rho g}{2\mu} y^2 - \frac{C_1}{\mu} y + C_2$$

Syarat batas : 1. $y = 0 \rightarrow \tau_{yz} = 0 \rightarrow \frac{dv_z}{dy} = 0$

2. $y = \delta \rightarrow v_z = 0$

Substitusi kedua syarat batas memberikan hasil :

$$c_1 = 0$$

$$c_2 = \frac{\rho g}{2\mu} \delta^2$$

Sehingga : $\tau_{yz} = \rho g y$

$$v_z = \frac{\rho g}{2\mu} (z^2 - y^2)$$

Persamaan (5-35) memberikan :

$$F_k = f \cdot (WL) \frac{1}{2} \rho \langle v_z \rangle^2$$

$$F_k = \tau_{yz}|_{y=\delta} =$$

$$\rho g \delta \text{ Jadi : } (\rho g \delta)(WL) = f (WL) \frac{1}{2} \rho \langle v_z \rangle^2$$

$$f = \frac{\rho g \delta}{\frac{1}{2} \rho \langle v_z \rangle^2} = \frac{\rho g \delta}{\frac{1}{2} \rho \cdot \frac{\rho g \delta}{3\mu}} \langle v_z \rangle$$

$$f = \frac{6\mu}{\rho \delta \langle v_z \rangle} = \frac{6}{Re}$$

jika

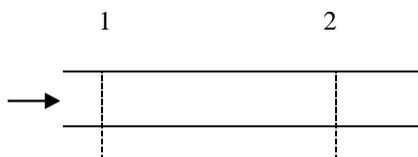
$$\frac{\rho \langle v_z \rangle \nu}{\mu} = Re$$

Perhatikan, bahwa hubungan untuk f diatas berbeda dari hubungan untuk aliran berlapis dalam pipa.

SOAL

- b) Melalui pipa mendatar yang licin dtekan air sebanyak 1 kg/detik ($Re = 2 \cdot 10^4$). Selisih tekanan antara kedua ujung pipa adalah $2 \cdot 10^5 \text{ N/m}^2$. Berapa besarkah energi P yang diperlukan? Kalau dianggap tidak ada perpindahan panas dengan keliling, hitunglah kenaikan temperatur air.

ANALISA



Batas geometri yang diberikan dalam soal adalah seperti gambardisebelah ini.

Dalam soal ditanyakan energi P dan diberitahukan selisih tekanan yang juga suatu bentuk energi. Hal-hal ini memberi saran, bahwa persamaan Bernoulli dapat dipakai, karena persamaan itu merupakan neraca energi mekanis.

PENYELESAIAN

Pesamaan Benoulli :

$$\frac{1}{\rho} (P_2 - P_1) + g(h_2 - h_1) + \frac{1}{2} \langle v_2 \rangle^2 - \frac{1}{2} \langle v_1 \rangle^2 + \bar{w} + \bar{E} = 0$$

Diketahui, bahwa :

$$P_2 - P_1 = -2 \cdot 10^5 \text{ N/m}^2$$

$$g(h_2 - h_1) = 0, \text{ karena } h_2 = h_1$$

$$\frac{1}{2} \langle v_2 \rangle^2 - \frac{1}{2} \langle v_1 \rangle^2 = 0, \text{ karena } \langle v_2 \rangle = \langle v_1 \rangle$$

$$\bar{w} = 0, \text{ karena pola pompa terletak diluar sistem yang ditinjau.}$$

Jadi energi P diperlukan hanya untuk mengatasi gesekan $-E$:

$$-G \cdot E = \frac{P_2 - P_1}{v} \cdot \rho H$$

$\rho = 1000 \text{ kg/m}^3$
 $G = 1 \text{ kg/detik.}$

$$P = -E = -G \cdot E = \frac{1.2 \cdot 10^5}{10^3} = 200 \text{ Nm/detik} = 200 \text{ watt}$$

Panas yang timbul dalam peristiwa ini hanya mungkin datang dari energi yang hilang karena gesekan dinding pipa. Namun panas itu dalam hal ini dianggap tidak diserap oleh pipa, tetapi hanya oleh air.

Jadi panas yang timbul $= -E = 200 \text{ watt}$

Panas yang diserap oleh air ialah :

$$G \cdot C_p \Delta T = 200 \text{ watt}$$

$$C_p = 4,19 \cdot 10^3 \text{ J/kg } ^\circ\text{C}$$

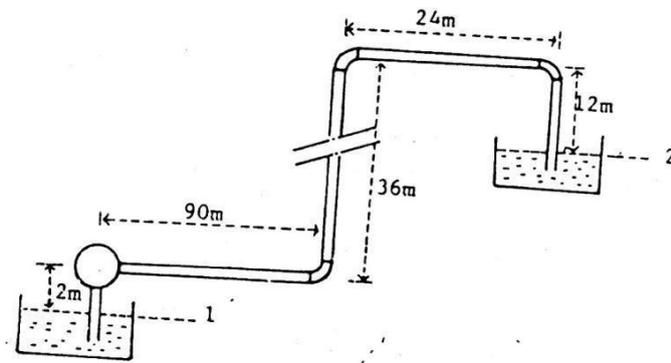
$$1 \cdot 4,19 \cdot 10^3 \cdot \Delta T = 200$$

$$\Delta T = \frac{200}{4,19 \cdot 10^3} = 0,048 \text{ } ^\circ\text{C}$$

SOAL

- c) Berapa daya kuda diperlukan untuk memompa air dalam sistem dalam diagram dibawah ini ? Air harus disalurkan kedalam tanki atas sebanyak 340 liter per menit. Semua pipa berpenampang linngkaran dan licin, dengan diameter dalam 10 cm.

$$\mu \text{ air} = 1,0 \text{ cp}, \rho \text{ air} = 1000 \text{ kg/m}^3, g = 9,81 \text{ m/detik}^2$$



ANALISA

Daya penggerak aliran merupakan salah satu Suku Persamaan Bernoulli (5.47). penggunaan persamaan Benoulli memang khas untuk perhitungan aliran dalam pipa. Selain itu akan dipakai daftar faktor rugi-gesekan.

RENCANA

Besarnya daya kuda dapat dihitung secara aljabar dengan persamaan Benoulli, dengan lebih dahulu menghitung semua suku yang lain.

PENYELESAIAN

Sifat aliran harus diketahui lebih dulu, yaitu berlapis atau bergolak. Untuk itu harus dihitung Re. Kecepatan rata-rata dihitung sebagai berikut :

$$\langle V \rangle = \frac{Q}{\pi R^2} = \frac{0,340/6}{\pi \cdot 25 \cdot 10^{-4}} = 0.722 \text{ m det}^{-1}$$

$$Re = \frac{\rho \langle V \rangle d}{\mu} = \frac{(1000)(0.722)(0.10)}{0.001} = 7.22 \cdot 10^4$$

$$Re > 4000$$

Jadi aliran adalah bergolak.

Persamaan Bernoulli :

$$\int_1^2 \frac{1}{\rho} dp + g(h_2 - h_1) + \frac{1}{2}(\langle v_2 \rangle^2 - \langle v_1 \rangle^2) + \bar{w} + \bar{E} = 0 \quad (5-47)$$

Mula-mula harus ditetapkan :

Bidang 1 = permukaan air dalam sumber

Bidang 2 = permukaan air dalam tangki

Semua suku dalam persamaan Bernoulli yang sudah diketahui, harus dihitung. Rugi-gesekan dihitung dalam dua bagian, bagian pipa yang lurus dan sambungan-sambungan.

Untuk bagian pipa yang lurus dipakai persamaan (5-48) :

$$L = 2 + 90 + 36 + 24 + 12 = 164 \text{ m.}$$

$$R_h = \frac{\pi R^2}{2\pi r} = \frac{1}{2}R = \frac{1}{4}d = 0.025 \text{ m} = \frac{1}{40} \text{ m.}$$

Dari persamaan (4.44) : $f = \frac{0.0791}{72200^{0.25}} = 0.0048$

Jadi : $\bar{E} = \frac{1}{2} \langle V \rangle^2 \cdot \frac{L \cdot f}{R_h}$
 $= \frac{1}{2} (0.722)^2 (164) (0.0048) (40) = 8.21 \text{ m}^2 \text{ det}^{-2}$

Rugi-gesekan sambungan dihitung dengan persamaan (5-49) sebagai berikut :

Ujung pipa hisap :	e_v	=	0.45
Ujung pipa tekan :	$e_v = 1^2$	=	1
3 belokan 90°	$e_v = 3 \times 0.5$	=	1.5
	$e_v =$		<hr style="width: 100px; margin-left: 0;"/>
			2.95

Jadi : $\bar{E} = \frac{1}{2} \langle V \rangle^2 \cdot e_v$
 $= \frac{1}{2} (0.722)^2 (2.95) = 0.77 \text{ m}^2 \text{ det}^{-2}$
 $\bar{E} = \bar{E} + \bar{E} = 8.21 + 0.77 = 8.98 \text{ m}^2 \text{ det}^{-2}$

Kemudian dihitung suku-suku yang lain :

$$\int_1^2 \rho \, dp = \frac{1}{\rho} (P_2 - P_1) = 0, \text{ karena } P_1 = P_2 = 1 \text{ atm}$$

$$g(h_2 - h_1) = 9.81(2 + 36 - 12) = 255 \text{ m}^2 \text{ det}^{-2}$$

$$\frac{1}{2}(\langle v_2 \rangle^2 - \langle v_1 \rangle^2) = 0, \text{ karena } \langle v_1 \rangle = \langle v_2 \rangle = 0$$

Kalau semua suku dimasukkan kedalam persamaan Bernoulli akan diperoleh:

$$0 - 255 + \bar{w} + 8.98 = 0$$

$$\bar{w} = -255 - 8.98 = -264 \text{ m}^2 \text{ det}^{-2} \text{ (per kg)}$$

Ini adalah usaha yang dibawa oleh aliran keluar. Pompa itu sendiri melakukan usaha $+264 \text{ m}^2 \text{ det}^{-2}$ untuk setiap satuan massa aliran $264/9.81 = 26.91 \text{ kgf m/kgm}$.

$$G = Q_p = \frac{0.340 \times 1000}{60} = 5.67 \text{ kgm det}^{-1}$$

Daya yang harus diberikan oleh pompa ialah :

$$\begin{aligned} -w &= -G \cdot \bar{w} = (5.67)(26.91) = 152.58 \text{ kgf m det}^{-1} \\ &= 152.58 \div 75 = 2.03 = 2 \text{ daya kuda} \end{aligned}$$

SOAL

- d) Pada dasar sebuah tangki yang berisi air, ada lubang yang menyerupai orifis berpinggir tajam. Luas penampang tangki yang berbentuk silindr itu adalah 0.5 m^2 , tinggi air $h = 3 \text{ m}$, luas lubang $= 5.10^{-4} \text{ m}^2$. Hitunglah waktu yang diperlukan sampai semua air habis keluar dari lubang. Koefisien-buang orifis $C = 0,632$ dianggap tidak berpengaruh oleh perubahan tinggi air.

ANALISA

Tinggi permukaan air akan merupakan daya pendorong untuk mengalirnya air keluar orifis. Tinggi permukaan air ini akan berkurang, sehingga laju alir keluar orifis akan berkurang juga, tergantung pada waktu. Jadi laju alir akan merupakan fungsi waktu.

RENCANA

Persamaan untuk laju alir harus dicari, yang memuat tinggi permukaan air dan waktu. Persamaan ini umumnya berbentuk persamaan differensial. Integrasi akan menghasillkan waktu yang ditanyakan.

PENYELESAIAN

Lebih dahulu perlu dicari hubungan antara laju alir volum dengan ukuran tangki.

Misalkan :

$$\text{Laju alir volum} = Q$$

$$\text{Luas penampang tangki} = A_1$$

$$\text{Luas lubang} = A_o$$

Maka diperoleh persamaan :

$$Q = -A_1 \frac{dh}{dt}$$

Persamaan ini harus dihubungkan dengan persamaan orifis (5-60) :

$$\rho \cdot Q = C A_o \sqrt{\frac{2(P_2 - P_1)}{1 - \left(\frac{A_o}{A_1}\right)^2}}$$

Dalam persamaan diatas :

$$\left(\frac{A_o}{A_1}\right)^2 \text{ diabaikan karena } \frac{5 \cdot 10^{-4} \cdot 2}{5 \cdot 10} = 10^{-6} = 0$$

Q dihilangkan dari kedua persamaan diatas, yang menghasilkan :

$$Q = -A_1 \frac{dh}{dt} = C A_o \sqrt{\frac{2(P_2 - P_1)}{\rho}}$$

Diketahui bahwa :

P_1 = tekanan pada dasar tanki

P_2 = tekanan luar

Sehingga diperoleh :

$$P_1 = P_2 + \rho gh$$

$$P_1 - P_2 = \rho gh$$

Substitusi memberikan :

$$-\frac{dh}{dt} = \frac{C A_o}{A_1} \sqrt{2gh}$$

$$dt = \frac{A_1}{C A_o \sqrt{2g}} h^{1/2} dh$$

Integrasi memberikan :

$$\begin{aligned} t &= - \frac{A_1}{C A_o \sqrt{2g}} 2h^{1/2} + C_1 = \\ &= \frac{2.5 \cdot 10^{-1}}{0.632 \cdot 5 \cdot 10^{-4} \cdot (2 \cdot 9.81)^{1/2}} h^{1/2} + C_1 \\ t &= -7.14,4 h^{1/2} + C_1 \end{aligned}$$

Dengan syarat batas : $t = 0 \rightarrow h = 3$

Diperoleh :

$$C_1 = 1237$$

$$t = 1237 - 714.4 h^{1/2}$$

Air dalam tangki akan habis pada waktu $h = 0$, sehingga diperoleh :

$$t = 1237 \text{ detik}$$

RINGKASAN DAN SOAL-SOAL.

Analisa dimensi.

- Persamaan harus mempunyai dimensi homogen
- Bagaimana melakukan analisa dimensi
- Keuntungan dan kerugian analisa dimensi
- Memperkirakan pembesaran alat.

Aliran dalam saluran.

- Faktor gesekan funning
- Gaya pada dinding saluran
- F merupakan fungsi Re
- Hukum Hagen-Poiseuille, kapan berlaku?
- Persamaan Bernoulli; sebutkan berbagai kegunaannya
- Sebutkan berbagai jenis alat ukur alir.

SOAL-SOAL

1. Cailah hubungan antar faktor gesekan dan bilangan Reynolds dalam suatu aliran cairan berlapis :
 - a. Antara dua lempeng datar.
 - b. Dalam sebuah saluran tegaklurus, yang berpenampang persegi, lebar $2A \times 2A$

Jawab : a) $f = \frac{12}{Re}$

$$b) f = \frac{6}{Re}$$

2. Dua buah silinder yang berporos sama, memuat suatu cairan Newton dalam ruang anulusnya. Silinder-luar diam, sedang silinder-dalam erputar dengan kecepatan sudut yang tetap, sehingga terjadi aliran tangensial yang berlapis. Nyatakan faktor gesekan sebagai fungsi bilangan Reynolds. Gunakan kecepatan putar silinder dalam sebagai kecepatan sistem.

Jawab : $f = 4/Re$

3. Hitunglah sisi tekanan melalui sebuah alat ukur aliran yang kapilar, dengan dinding licin, jika kecepatan udara yang melaluinya :

- a. 5 m detik-1
- b. 100 m detik-1

Panjang pipa kapilar 10 cm, diameter 1 cm,

$$\text{Udara : } \mu = 2 \cdot 10^{-5} \text{ N det m}^{-2}$$

$$\rho = 1.2 \text{ kgm}^{-3}$$

Jawab : a) $\Delta P = 3.2 \cdot 10^2 \text{ N m}^{-2}$
 b) $\Delta P = 2.2 \cdot 10^4 \text{ N m}^{-2}$

4. Melalui pipa baja yang panjangnya 60 m, dipompakan air sehingga mencapai laju alir volum $120 \text{ m}^3/\text{jam}$, pada ujung pipa yang letaknya 25 m lebih tinggi. Berapakah selisih tekanan antara kedua ujung pipa, kalau :
- a) Pipa mempunyai penampang bulat dengan diameter 10 cm.
 - b) Pipa mempunyai penampang bujur sangkar, $10 \times 10 \text{ cm}$.
 - c) Air dialirkan melalui anulus dengan $d_1 = 14 \text{ cm}$, $d_2 = 10 \text{ cm}$.

Jawab : a) $3.2 \cdot 10^5 \text{ Nm}^{-2}$
 b) $3.15 \cdot 10^5 \text{ N m}^{-2}$
 c) $6.3 \cdot 10^5 \text{ N m}^{-2}$

- 5a. Sebuah pipa 8 inci menghubungkan sebuah saringan putar dengan tempat,

yang terletak 3,75 m dibawahnya untuk mengalirkan bubur selulosa. Panjang pipa 15 m, memuat 2 belokan pendek 90° dan 1 gate valve terbuka. Berapakah laju alir volum aliran bubur itu? Kekentalan bubur selulosa = $5 \cdot 10^{-3} \text{ N det/m}^3$ pada 20°C , densiti bubur 1200 kg/cm^3 .

Jawab : $Q = 557 \text{ m}^3 \text{ jam}^{-1}$

6. Alir ditekan melalui pipa datar yang licin ($Re = 2 \cdot 10^4$), sehingga terjadi selisih tekanan sebesar $2 \cdot 10^5 \text{ N/m}^2$. Berapakah energi yang diperlukan untuk menekan itu, jika 1 kg/detik air ditekan melalui pipa yang 1,5 kali lebih sempit?

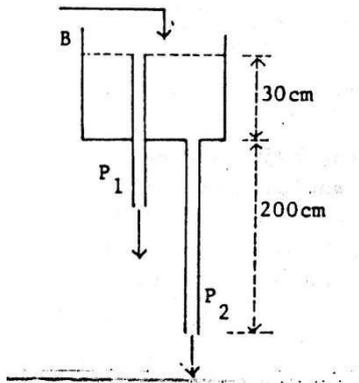
Jawab : 1370 watt

- 7a. Air mengalir keluar dari pipa datar, diameter 10 cm, dengan kecepatan 2

m/det, menyembur dinding lebar yang dipasang tegaklurus dekat ujung pipa. Hitunglah gaya semburan air yang bekerja pada dinding itu, jika dianggap, bahwa sesudah kena dinding air mengalir ke samping melewati permukaan dinding.

Jawab : 31,4 N

- 8a. Sebuah alat untuk memberikan aliran yang tetap, disusun seperti pada gambar dibawah ini.



Ke dalam botol terbuka B dialirkan larutan encer garam dalam air sedemikian banyaknya, hingga tinggi permukaan dalam botol itu tetap 30 cm dan kelebihan larutan terbuang melalui pipa P₁. Jika pipa kaca P₂ berdiameter 10 mm dan panjangnya 200 cm, berapakah laju alir yang keluar dari pipa P₂?

Jawab : $Q = 0.041 \text{ m}^3 \text{ det}^{-1}$

9a. Hitunglah bagaimana rugi energi mekanis E.C, per satuan waktu bergantung pada laju alir volum dalam :

- a) Sebuah orifisimeter
- b) Sebuah rotameter

Jawab : a) E.G (\cdot) Q^3

b) E.G (\cdot) Q

10. Apakah sebuah rotameter, yang telah ditera terhadap air, dapat dipakai untuk mengukur laju alir alkohol, tanpa meneranya kembali? Kalau dapat, hitunglah faktor konversinya.

ρ alkohol = 760 kg/m^3 ; pelampung = 7000

kg/m^3 Jawab : 0.89

11. sebuah tangki minyak, diameter 3 meter dan tinggi 5 meter, berisi penuh

dengan minyak kelapa ($\rho = 900 \text{ kgm}^3$; $\mu = 7 \cdot 10^{-2} \text{ N det m}^{-2}$). Dalam suatu serangan udara tangki itu terkena peluru dan mendapat lubang pada sisinya, diameter 2 cm dan tinggi titik engah 101 cm dari dasar tangki. Dalam berapa waktu minyak akan berhenti mengalir keluar, jika selama itu lubang tidak disumbat ?

Jawab : 6351 detik

12a. Suatu cairan Newton mengalir secara bergolak ($Re = 10^4$) melewati sebuah

Pipa mendatar yang licin. Kalau laju alir dilipatkan tiga, menjadi berapa lipatkah selisih tekanannya?

Supaya pada laju alir yang lipat tiga itu, selisih tekanan sama dengan semula, pipa itu harus diganti dengan pipa berdiameter berapa ?

Jawab : ΔP menjadi 6.83 x, $d_2 = 1.5 d_1$

13. penyaring dari soal No. 5a mempunyai palung, yang pada salah satu sisinya

ada palang selebar 2,85 m. Bubur selulosa yang mengalir melewati palang itu biasanya tingginya 2,5 cm diatas bibir palang. hitunglah banyaknya bubur selulosa yang mengalir.

Jawab : $75 \text{ m}^3 \text{ jam}^{-1}$

14a. Gas hasil bakar dialirkan kedalam cerobong dengan tekanan 250 Nm^{-2}

dibawah tekanan luar. Cerobong dibuat dari baja, berupa silinder dengan diameter dalam 1,86 m. Gas hasil bakar dialirkan sebanyak 15 ton jam-1 dengan temperatur rata-rata 260°C $= 1,27 \text{ kg m}^{-3}$ dan $\mu = 15.6 \cdot 10^{-6} \text{ N det m}^{-2}$. Perkirakan tinggi cerobong.

Jawab : 44 m.

ALIRAN MELIPUTI BENDA

Dalam teknik sering dijumpai keadaan, dimana suatu fluida mengalir meliputi sebuah atau banyak benda. Benda itu dapat berupa benda padat, tetesan cairan maupun gelembung. Pendekatan analisa melalui ketiga jenis benda itu sama. Sepanjang bentuknya tetap dan permukaannya antar-fasa tidak bergerak.

Benda-benda itu merupakan hambatan terhadap aliran. Yang diatasi oleh fluida yang mengalir itu dengan menimbulkan suatu gaya terhadap benda itu. Hambatan itu bersumber pada dua peristiwa. Tahanan pertama ditimbulkan oleh gesekan fluida pada permukaan benda. Yang kedua disebabkan oleh bentuk geometri benda itu. Yang pertama disebut HAMBATAN GESEKAN, yang kedua HAMBATAN BENTUK. Keduanya bersama-sama menimbulkan hambatan keseluruhan. Adanya hambatan itu dinyatakan dengan KOEFISIEN HAMBATAN, yang diberi batasan sebagai berikut.

$$F = C_D A^{1/2} \rho v_\infty^2 \quad (5-65)$$

Batasan ini serupa dengan batasan faktor gesekan (persamaan 5-35) dan menggap gaya itu terdiri dari hasil kali energi kinetis. Luas benda A dan suatu koefisien hambatan C_D sebagai luas A biasanya diambil luas penampang terbesar benda itu. Tegak lurus pada arah alir. Dan v_∞ adalah kecepatan nisbi antara benda dan aliran.

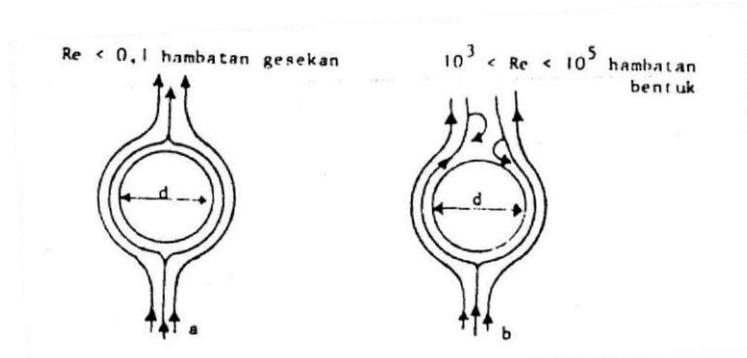
Jika benda itu sendiri bergerak dengan adanya gaya dari luar sistem (gaya gravitasi, gaya sentrifugal, gaya magnet, gaya listrik atau gaya apung) maka hambatan itu akan menentukan kecepatan akhir yang akan dicapai benda.

Analisa benda yang berbentuk bola akan diturunka dibawah ini. Benda diandaikan berbentuk bola dengan permukaan yang tidak bergerak dan dengan bentuk yang tetap. Tanpa menyebut apakah benda itu padat, cair atau berupa gas.

Gambaran tentang aliran sekitar benda itu tergantung pada besarnya bilangan reynolds, yang dalam hal ini didefinisikan sebagai $Re = \frac{\rho v_\infty d}{\mu}$; ρ dan μ adalah sifat fluida yang mengalir, v_∞ kecepatan nasbi dan d DIAMETER BOLA. Dalam hal bebda tidak berbentuk bola, maka diambil $d_e =$ diameter setara, yang merupakan diameter bola yang volumenya sama dengan volum benda.

$$d_e = 4 R_h$$

$$R_h = \frac{\text{luas penampang A}}{\text{keliling yang terbasahi}}$$



Gambar 5.20. Aliran meliputi bola

Jika kecepatan alir fluida besar sekali ($Re > 0,1$) fluida mengalir sejajar dengan permukaan bola dan bertemu lagi disebelah belakang bola. (Gambar 5.20.a) dalam daerah bilangan reynolds sangat rendah ini hanya ada hambatan gesekan dan kecepatan menjadi tetap, dalam daerah ini berlaku Hukum Stokes.

$$F = 3\pi\mu dv$$

Jika Hukum Stokes ditulis dalam bentuk persamaan (5-65) maka diperoleh :

$$F = \frac{24\mu}{\rho v_{\infty} d} \cdot \frac{\pi d^2}{4} \cdot \frac{1}{2} \rho v_{\infty}^2$$

Atau
$$C_D = \frac{24}{Re}$$

Jika bilangan Reynolds bertambah besar. Maka baik hambatan gesekan maupun hambatan bentuk berpengaruh. Akan tetapi pengaruh hambatan gesekan makin kecil kalau semakin besar. Hambatan bentuk terutama disebabkan karena lapisan fluida melepas diri dari permukaan benda, dan mulai terbentuk gelombang. Tempat dimana pelepasan fluida itu terjadi menetapkan besarnya hambatan bentuk. KECEPATAN AKHIR benda-benda. Yang bergerak dalam fluida, dapat ditentukan dengan membuat suatu neraca gaya pada benda itu, yaitu gaya hambatan dipersamakan dengan gaya dorong gerakan (= berat temu benda atau gaya apung).

Berat semu benda
$$\frac{\pi}{6} \frac{d^3}{p} (\rho_p - \rho_f) g$$

Hukum Stokes :

$$F = \pi d \mu v_a (\text{hambatan bentuk}) + 2\pi d \mu v_a (\text{hambatan gesekan})$$

$$F = 3\pi d \mu v_a$$

Semua yang diuraikan tentang benda yang berbentuk bola pada dasarnya berlaku juga untuk bentuk-bentuk yang lain sudah tentu besarnya koefisien hambatan akan lain. Untuk perhitungan koefisien hambatan, dalam operasi teknik kimia sering digunakan nomogram atau data percobaan.

Dalam banyak operasi teknik kimia dijumpai aliran yang terhambat oleh benda-benda padat. Cara penyelesaian masalah-masalah ini dalam operasi teknik kimia berbeda satu dari yang lain. Dan karena itu tidak akan dibicarakan disini.

Dalam perpindahan panas, dalam alat penukar panas selalu ada aliran yang tegak lurus melewati kumpulan pipa (=benda berbentuk silinder) dalam distilasi dan absorpsi sering dipakai menara yang berunggun, yang harus dilewati oleh aliran gas. Dalam sedimentasi dan klasifikasi dijumpai benda-benda padat yang jatuh melewati suatu fluida. Dalam fluidisasi dan pengangkutan pneumatis benda-benda tidak jatuh, akan tetapi dibawa oleh aliran.

Semua contoh-contoh diatas hendaknya dipelajari dalam operasi teknik kimia.

SOAL-SOAL

1. Dua buah bola logam, yang sama berat, akan tetapi berbeda diameter. Jatuh melalui udara . Hitunglah perbandingan kecepatan akhirnya . Jika diameternya berbanding 3:1 dan aliran disekitar bola itu serupa

Jawab : 1:3

2. Hitunglah kekurangannya konsentrasi oksigen dalam udara dibanding terhadap udara pada permukaan air laut . Jika tekanan udara dapat dianggap sebagai fungsi tinggi diatas permukaan air laut.

Keterangan : udara dianggap gas ideal

Temperatur di Bandung 25°C , temperatur dipermukaan air laut 30 tinggi bandung 900m diatas permukaan air laut.

Jawab : 9%

3. gelembung-gelembung udara. Yang dihembuskan dalam air akuarium , berdiameter 5mm. Berapakah kecepatan tetap yang akan dicapai gelembung-gelembung itu.

Jawab : $v_a = 0,39 \text{ m det}$

4. hitunglah kecepatan akhir tetap yang akan dicapai oleh setetes air hujan . yang berbentuk bola. Dalam udara. Diameter tetes 2mm.

Jawab : $7,1 \text{ m det}^{-1}$

A. Evaluasi

1. Jelaskan pengertian Peristiwa perpindahan Momentum
2. Jelaskan bagaimana peristiwa perpindahan momentum pada suatu system dapat terjadi.
3. Buatlah contoh peristiwa perpindahan momentum

B. Buku Sumber, Bacaan Pendukung

Douglas, J.M., 1988, "conceptual Design of Chemical Processes"

Lee, W. James H.Christense&Dale F.Rudd, "Design Variabel selection to simplify Process Calculations". AICHE Journal, vol 12 No.6 Nov 1966 pp-1104-1110

Linnhoff, B., and Flower, J.R., 1978, "Syntesis of Heat Exchanger Networks", AICHEJ, vol. 24.

R.B. Bird, W.E. Stewart & E.N. Lightfoot, Transport Phenomena, Jhon Wiley, 1965.

Rudd, D.F., and Watson, C.C., 1968, "Strategy of Process Engineering", John Wiley and Sons, Inc., New York

Townsend, D.W., and Linnhoff, B., 1982, "Designing Total Energy System by Systematic Methode", Chem. Eng. No.378, London

W.J. Beek & K.M.K. Mutzall, Transport Phenomena, Jhon Wiley, 1975.

BAB 6

PERPINDAHAN PANAS

Dalam bab ini akan dipelajari peristiwa-peristiwa dimana terjadi perpindahan panas, yaitu proses perpindahan energi dari satu tempat ketempat yang lain.

Dalam kehidupan sehari-hari perpindahan energi mendapat penerapan yang luas sekali, dalam berbagai bidang dan dalam berbagai tingkat kerumitan. Hampir tidak ada alat, baik dalam pabrik maupun di rumah tangga, yang tidak bersangkutan dengan perpindahan energi.

Energi dikenal dalam berbagai bentuk, beberapadiantaranya yang dijumpai dalam bidang teknik kimia ialah :

- Energi dalam
- Energi kinetis
- Energi potensial
- Energi mekanis
- Panas.

Dalam bidang teknik kimia didapati banyak masalah perpindahan panas. Pengetahuan tentang mekanisme dalam panas mutlak diperlukan untuk dapat memahami peristiwa-peristiwa yang berlangsung dalam pemanasan, pendinginan, pendidihan, pengeringan, distilasi, evaporasi, kondensasi dan lain-lainnya.

Ada tiga cara perpindahan panas, yang mekanismanya sama sekali berlainan, yaitu :

- Secara molekular disebut Konduksi
- Secara aliran disebut Konveksi
- Secara gelombang elektromagnet disebut Radiasi

Dalam zat yang tidak bergerak, misalnya padatan panas hanya berpindah secara Konduksi. Dalam hal ini panas berpindah secara getaran molekul, dari satu molekul ke molekul yang lain. Besarnya Fluksi Panas antara dua tempat dalam padatan dinyatakan dengan Hukum Fourier :

$$\vec{q} = -k \nabla T \quad (6-1)$$

Selisih temperatur antara dua tempat itu ialah dT dan jarak diantaranya adalah dx , k disebut KOEFISIEN KONDUKSI PANAS padatan tersebut, yang hanya berubah harganya jika temperatur padatan berubah. Dengan demikian k merupakan sifat fisis padatan itu. Satuan untuk k ialah $\text{watt (m)}^{-1} (\text{°K}^{-1})$ dalam satuan S.I atau $\text{kcal (m)}^{-2} (\text{jam})^{-1} (\text{°C/m})^{-1}$. Dalam satuan teknik. Logam mempunyai koefisien konduksi panas yang besar harganya dan merupakan penghantar panas yang baik. Sebaliknya asbes kecil harga koefisien konduksi panasnya, sehingga merupakan bahan insulasi panas yang baik.

Didalam fluida terjadi juga konduksi panas, akan tetapi disamping itu panas lebih banyak dipindahkan secara Konveksi. Dalam hal ini panas berpindah karena terbawa massa fluida yang bergerak sebagai aliran. Jadi konveksi hanya dapat terjadi dalam suatu fluida.

Berdasarkan gerakan fluida ada dua cara konveksi, yaitu Konveksi Alamiah dan Konveksi Paksa. Dalam konveksi alamiah gerakan fluida disebabkan oleh beda densiti antara beberapa tempat, karena adanya selisih temperatur antara tempat-tempat itu. Dalam konveksi paksa fluida mengalir karena adanya usaha dari luar terhadap fluida, umpamanya oleh sebuah pompa atau kompresor.

Tekanan terhadap perpindahan panas secara konveksi berpusat ditempat pertemuan fluida dengan permukaan padat. Fluksi Panas dinyatakan dengan persamaan yang berikut, yang suka disebut “Hukum Pendingin Newton”:

$$q = h(T_{\text{padatan}} - T_{\text{fluida}}) \quad (6-2)$$

h disebut koefisien pindah panas untuk permukaan itu dan mempunyai satuan dalam sistem S.I. $W(m)^{-1} (^{\circ}K)^{-1}$ dan dalam sistem teknik $kcal (m)^{-2} (jam)^{-1} (^{\circ}C/m)^{-1}$. Dari persamaan (6-2) terlihat bahwa h bukanlah suatu sifat fisis karena h selalu menyangkut dua zat, yaitu permukaan padat dan fluida.

Radiasi ialah perpindahan panas secara gelombang elektromagnet antara dua permukaan yang berbeda temperatur. Untuk radiasi tidak diperlukan zat-antara, akan tetapi supaya terjadi radiasi zat antara kedua permukaan harus tembus cahaya terutama inframerah. Menurut Hukum Stefan Boltzmann semua permukaan hitam memancarkan panas menurut persamaan :

$$q = \sigma T^4 \quad (6-3)$$

σ ialah tetapan Stefan-Boltzmann yang harganya $1.355 \cdot 10^{-12} \text{ kal}(\text{detik})^{-1} (\text{cm})^{-2} (\text{oK})^{-4}$. Arti hitam akan dijelaskan kemudian.

Panas selalu berpindah dari tempat dengan temperatur tinggi ketempat dengan temperatur rendah. Untuk perpindahan panas selisih temperatur itu merupakan Gaya Geraknya.

Dalam bab ini akan diturunkan persamaan energi dan akan dibahas penerapannya. Peristiwa-peristiwa perpindahan panas banyak ditemui dalam operasi teknik kimia akan ditinjau lebih mendalam.

1. Persamaan Energi

Untuk penurunan Persamaan Energi akan dipakai lagi unsur-volum silinder. Berdasarkan apa yang telah dibahas dalam Bagian 1, neraca energi akan dibuat untuk bentuk-bentuk energi yang dijumpai dalam teknik kimia dan disusun sebagai berikut :

(laju akumulasi energi-dalam dan energi kinetis) = (selisih laju alir energi-dalam dan kinetis antara yang masuk dan keluar oleh konveksi) + (selisih laju perpindahan panas karena konduksi) + (jumlah usaha yang dikerjakan oleh lingkungan pada sistem). (6.4)

Lebih dahulu masing-masing suku dalam persamaan (6-4) akan dihitung satu demi satu.

$$\text{Laju akumulasi} = r\Delta\theta\Delta r\Delta z \frac{\partial}{\partial t} (\bar{\rho}\bar{U} + \frac{1}{2}\rho v^2) \quad (6-5)$$

Disisi \bar{U} adalah jumlah energi-dalam per satuan massa, sehingga persamaan (6-5) menyatakan perubahan energi-dalam dan energi kinetis per satuan waktu dalam unsur volum.

Selisih laju alir energi-dalam dan kinetis karena konveksi adalah :

$$\begin{aligned} \text{Ke-arah } r : r\Delta\theta \cdot \Delta z \{v_r(\bar{\rho}\bar{U} + \frac{1}{2}\rho v^2)|_r - v_r(\bar{\rho}\bar{U} + \frac{1}{2}\rho v^2)|_{r+\Delta r}\} + \\ \text{Ke-arah } \theta : \Delta r \cdot \Delta z \{v_\theta(\bar{\rho}\bar{U} + \frac{1}{2}\rho v^2)|_\theta - v_\theta(\bar{\rho}\bar{U} + \frac{1}{2}\rho v^2)|_{\theta+\Delta\theta}\} + \\ \text{Ke-arah } z : r\Delta\theta \cdot \Delta r \{v_z(\bar{\rho}\bar{U} + \frac{1}{2}\rho v^2)|_z - v_z(\bar{\rho}\bar{U} + \frac{1}{2}\rho v^2)|_{z+\Delta z}\} \end{aligned} \quad (6-6)$$

Selisih laju perpindahan panas karena Konduksi adalah :

$$r\Delta\theta.\Delta z\{q_r|_r - q_r|_{r+\Delta r}\} + \Delta r.\Delta z\{q_\theta|_\theta - q_\theta|_{\theta+\Delta\theta}\} + r\Delta\theta.\Delta r\{q_z|_z - q_z|_{z+\Delta z}\} \quad (6-7)$$

Usaha yang dilakukan lingkungan terhadap unsur-volum terdiri atas dua bagian, yaitu usaha yang dilakukan oleh gaya-gaya permukaan (tekanan dan tegangan geser) dan usaha yang dilakukan oleh gaya volum (grafitasi). Untuk memudahkan memahami yang diuraikan dibawah ini, perlu diingat, bahwa :

$$\text{Usaha} = (\text{gaya}) \times (\text{jarak dalam arah gaya})$$

Laju perpindahan usaha = daya = (gaya) x (kecepatan ke arah gaya).

Selisih usaha oleh TEKANAN adalah :

$$r\Delta\theta.\Delta z\{\rho v_r|_r - \rho v_r|_{r+\Delta r}\} + \Delta r.\Delta z\{\rho v_\theta|_\theta - \rho v_\theta|_{\theta+\Delta\theta}\} + r\Delta\theta.\Delta r\{\rho v_z|_z - \rho v_z|_{z+\Delta z}\} \quad (6-8)$$

Selisih usaha oleh tegangan geser adalah :

$$\dots\Delta z\{(\tau_{rr}v_r + \dots + \tau_{rz}v_z)|_r - (\tau_{rr}v_r + \tau_{r\theta}v_\theta + \tau_{rz}v_z)|_{r+\Delta r}\} + \Delta r\Delta z\{(\tau_{\theta r}v_r + \tau_{\theta\theta}v_\theta + \tau_{\theta z}v_z)|_\theta + (\tau_{\theta r}v_r + \tau_{\theta\theta}v_\theta + \tau_{\theta z}v_z)|_{\theta+\Delta\theta}\} + r\Delta\theta\Delta r\{(\tau_{zr}v_r + \tau_{z\theta}v_\theta + \tau_{zz}v_z)|_z + (\tau_{zr}v_r + \tau_{z\theta}v_\theta + \tau_{zz}v_z)|_{z+\Delta z}\} \quad (6-9)$$

Selisih usaha oleh grafitasi adalah :

$$+ r\Delta\theta\Delta r\Delta z \rho(v_r g_r + v_\theta g_\theta + v_z g_z) \quad (6-10)$$

Kalau dari persamaan (6-5) s/d (6-10) disusun neraca, kemudian neraca itu dibagi dengan volum $r\Delta\theta\Delta r\Delta z$ dan akhirnya diambil limit dari masing-masing suku pada waktu $\Delta\theta$, Δr dan Δz mendekati nol, maka diperoleh persamaan energi.

$$\frac{\partial}{\partial t}(\bar{\rho}U + \frac{1}{2}\rho v^2) = -\left\{\frac{\partial}{\partial r}\rho U + \frac{\partial}{\partial\theta}\rho U + \frac{\partial}{\partial z}\rho U + \frac{1}{2}\rho v^2\right\} - \left(\frac{\partial}{\partial r}q_r + \frac{\partial}{\partial\theta}q_\theta + \frac{\partial}{\partial z}q_z\right) - \left\{\frac{\partial}{\partial r}(\tau_{rr}v_r + \tau_{r\theta}v_\theta + \tau_{rz}v_z) + \frac{\partial}{\partial\theta}(\tau_{\theta r}v_r + \tau_{\theta\theta}v_\theta + \tau_{\theta z}v_z) + \frac{\partial}{\partial z}(\tau_{zr}v_r + \tau_{z\theta}v_\theta + \tau_{zz}v_z)\right\} + \rho(v_r g_r + v_\theta g_\theta + v_z g_z) \quad (6-11)$$

Persamaan (6.11) dapat ditulis lebih singkat dalam simbol vektor-vektor sebagai berikut :

$$\frac{\partial}{\partial t}(\bar{U} + \frac{1}{2}v^2) = -\{\nabla \cdot \rho \vec{v}(\bar{U} + \frac{1}{2}v^2)\} - (\nabla \cdot \vec{q}) - (\nabla \cdot \rho \vec{v}) - (\nabla \cdot [\tau \cdot \vec{v}]) + \rho(\vec{v} \cdot \vec{g}) \quad (6-12)$$

Bentuk diatas dari persamaan energi berlaku untuk unsur-volum yang tetap letaknya didalam ruang. Kalau suku pertama dalam ruas kanan dipindahkan keruas kiri dan diferensiasi itu dilakukan, maka diperoleh bentuk lain dari persamaan energi.

$$\rho \left[\frac{\partial}{\partial t} (\bar{U} + \frac{1}{2}v^2) + \mathbf{v} \cdot \nabla (\bar{U} + \frac{1}{2}v^2) \right] + (\bar{U} + \frac{1}{2}v^2) \left[\frac{\partial \rho}{\partial t} + (\nabla \cdot \rho \mathbf{v}) \right] = -(\nabla \cdot \dot{q}) - (\nabla \cdot [\tau \cdot \dot{v}]) + \rho(\dot{v} \cdot \dot{g}) \quad (6-13)$$

Suku kedua dalam ruas kiri ialah tidak lain daripada persamaan kontinuitas (6-4) dikalikan $(\bar{U} + \frac{1}{2}v^2)$, sehingga harganya sama dengan nol.

Jika $\frac{Dc}{Dt} = \frac{\partial c}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla c$, maka persamaan 6.13) dapat ditulis sebagai berikut :

$$\rho \frac{Dc}{Dt} (\bar{U} + \frac{1}{2}v^2) = -(\nabla \cdot \dot{q}) - (\nabla \cdot \rho \dot{v}) - (\nabla \cdot [\tau \cdot \dot{v}]) + \rho(\dot{v} \cdot \dot{g}) \quad (6-14)$$

Persamaan (6-14) adalah bentuk lain persamaan energi, yaitu yang berlaku jika unsur-volum ikut bergerak dengan aliran fluida.

Kedua bentuk persamaan energi (6-12) dan (6-14) masih belum memenuhi keperluan operasi teknik kimia. Untuk keperluan itu persamaan energi perlu diubah sehingga merupakan fungsi temperatur dan dengan demikian dapat digunakan untuk menghitung penyebaran temperatur.

Jika dalam persamaan (6-14) masing-masing suku dikalikan dengan \dot{v} , diperoleh :

$$\rho \frac{Dc}{Dt} (\frac{1}{2}v^2) = -(\dot{v} \cdot \nabla p) - (\dot{v} \cdot [\nabla \cdot \tau]) + \rho(\dot{v} \cdot \dot{g}) \quad (6-15)$$

Kalau persamaan (6-14) dikurangi dengan persamaan (6-16) diperoleh persamaan neraca energi – dalam \bar{U} :

$$\rho \frac{Dc}{Dt} \bar{U} = -(\nabla \cdot \dot{q}) - p(\mathbf{v} \cdot \dot{v}) - (\tau : \nabla \dot{v}) \quad (6-17)$$

Energi-dalam \bar{U} sebenarnya merupakan fungsi ∇ dan T sehingga dapat ditulis :

$$dU = \left(\frac{\partial U}{\partial \nabla} \right)_T d\nabla + \left(\frac{\partial U}{\partial T} \right)_\nabla dT = \{ -p + T \left(\frac{\partial p}{\partial T} \right)_\nabla \} d\nabla + \bar{c} dT \quad (6-18)$$

Dari persamaan (6-18) dapat dibentuk perkalian ρ dan $\frac{Dc}{Dt} \bar{U}$ menjadi :

Berdasarkan persamaan kontinuitas :

$$-\frac{1}{\rho} \frac{D\rho}{Dt} = (\nabla \cdot \dot{v}) = \rho \frac{D\nabla}{Dt} \quad (6-20)$$

Kalau persamaan (6-20) dimasukkan kedalam persamaan (6-19) dan selanjutnya disubstitusikan kedalam persamaan energi dengan temperatur fluida.

Persamaan (6-21) mengatakan, bahwa temperatur suatu unsur fluida yang bergerak berubah karena :

- Konduksi panas.
- Pengaruh ekspansi.
- Dan timbulnya panas karena gesekan molekul.

Untuk dapat menggunakan persamaan (6-21) untuk mencari penyebaran temperatur, maka tiap suku dalam ruas kanan perlu diuraikan lebih lanjut.

perlu diganti dengan komponen fluksi energi yang sesuai

Dibawah ini diberikan bentuk q untuk semua sistem koordinat.

Tabel 6.2. Komponen-komponen Fluksi q

tegaklurus	silinder	bola
$q_x = -k \frac{\partial T}{\partial x}$	$q_r = -k \frac{\partial T}{\partial r}$	$q_r = -k \frac{\partial T}{\partial r}$
$q_y = -k \frac{\partial T}{\partial y}$	$q_\theta = -k \frac{1}{r} \frac{\partial T}{\partial \theta}$	$q_\theta = -k \frac{\partial T}{\partial \theta}$
$q_z = -k \frac{\partial T}{\partial z}$	$q_z = -k \frac{\partial T}{\partial z}$	$q_\phi = -k \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial T}{\partial \phi}$

Untuk menyelesaikan $(\tau : \nabla \vec{v})$ perlu diketahui fungsi $p = p(T)$. Suku $(\tau : \nabla \vec{v})$ dapat dijabarkan menjadi :

$$(\tau : \nabla \vec{v}) = \mu \phi_v \quad (6-22)$$

$$\phi_v = \text{fungsi disipasi}$$

Dalam lampiran persamaan energi (6-21) dijabarkan secara lengkap dalam ketiga sistem koordinat, untuk fluida Newton dengan ρ dan μ yang tetap. Beberapa bentuk khusus yang sederhana untuk persamaan energi diberikan dibawah ini. Konduktivitas panas dianggap tetap.

a) Untuk gas ideal $\left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_v = \frac{p}{T}$ dan persamaan (6-21) berubah menjadi :

$$\bar{\rho} \bar{c}_v \frac{DT}{Dt} = k \nabla^2 T - p(\nabla \cdot \vec{v}) \quad (6-23)$$

b) Untuk suatu fluida pada tekanan tetap, dalam mana kehilangan panas karena gesekan diabaikan didapat :

$$\bar{\rho} \bar{c}_p \frac{DT}{Dt} = k \nabla^2 T \quad (6-24)$$

c) Untuk suatu fluida yang tidak termampatkan $\rho = \text{tetap}$, $\bar{c}_p = \bar{c}_v$ dan $(\nabla \cdot \vec{v})$ diperoleh :

$$\bar{\rho} \bar{c}_p \frac{DT}{Dt} = k \nabla^2 T \quad (6-25)$$

d) Untuk padatan, $\rho = \text{tetap}$ dan $v = 0$, didapat :

$$\bar{\rho} \bar{c}_p \frac{\partial T}{\partial t} = k \nabla^2 T \quad (6-26)$$

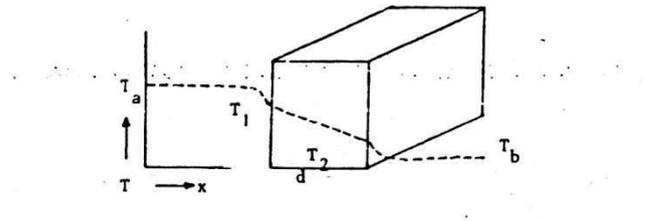
2. Penerapan Persamaan energy

Sifat-sifat perpindahan menentukan mudah atau sukarnya penyelesaian soal. Karena

konduksi dan aliran berlapis dapat dinyatakan secara matematis, maka soal-soal tentang konduksi

dan aliran berlapis dapat diselesaikan secara analisa. Jika ada konveksi tidak mungkin lagi diadakan perhitungan yang tepat.

a) Konduksi melewati padatan tunggal.



Gambar 6.1. Konduksi melewati padatan tunggal

SOAL

Sebuah lempeng padatan setebal d , kedua permukaannya berada pada temperatur T_1 dan T_2 . Temperatur lingkungan pada kedua permukaan itu adalah T_a dan T_b , seperti Gambar 6.1.

ANALISA

Contoh ini dan semua contoh dalam fasal ini adalah soal konduksi dan akan menggunakan persamaan (6-26). karena semua contoh itu serupa, maka analisa dan rencana penyelesaian tidak akan diulang dalam contoh-contoh yang berikut.

Untuk soal ini dipilih sistem koordinat tegaklurus.

RENCANA

Rencana penyelesaian tertera dibawah ini. Penyesuaian persamaan energi sebenarnya sudah dilakukan pada persamaan (6-26)

- i. Sesuaikan persamaan energi pada batas-batas sistem.
- ii. Tetapkan syarat batas dan integrasikan persamaan diferensial.
- iii. Substitusikan nilai tetapan integrasi.

PENYELESAIAN

Kalau hanya ditinjau konduksi panas melalui padatan tadi, berlaku persamaan (5.6-26), yang untuk soal ini menjadi :

$$\frac{\bar{\rho}C}{P} \frac{dT}{dt} = k \frac{d^2T}{dx^2} \quad (6-27)$$

Atau

$$\frac{dT}{dt} = \alpha \frac{d^2T}{dx^2}$$

Kalau $\frac{k}{\rho \bar{c}} = \alpha$, difusivitas termal.

Untuk keadaan mantap diperoleh $\frac{d^2T}{dx^2} = 0$ (6-28)

Persamaan (6-28) dapat diselesaikan dengan syarat-batas :

1. $x = 0 \rightarrow T = T_1$
2. $x = d \rightarrow T = T_2$

Dan menghasilkan penyebaran T dalam padatan :

$$\frac{T-T_1}{T_2-T_1} = \frac{x}{d} \quad (6-29)$$

Penyebaran T dalam fluida sekitar permukaan lempeng hanya dapat diselesaikan dengan analisa, kalau diketahui penyebaran kecepatan fluida ditempat itu.

PENILAIAN

Perpindahan panas pada kedua permukaan dengan lingkungan berlangsung secara konveksi dan dapat diselesaikan dengan persamaan empiris (6-2) , yang menghasilkan

$$\text{Pada permukaan 1 : } q_1 = h_1(r_a - T_1) \quad (6-30)$$

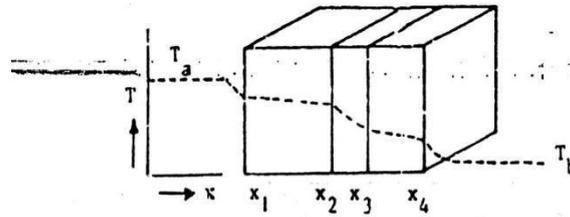
$$\text{Pada permukaan 2 : } q_2 = h_2(r_b - T_2) \quad (6-31)$$

Karena terdapat keadaan mantap, maka

$$q_1 = q_{1-2} = q_2$$

Namun cara ini tidak dapat memberikan fungsi penyebaran T sekitar permukaan lempeng secara jelas

- b. Konduksi melewati beberapa lapisan padatan



Gambar 5.3. Konduksi melewati beberapa lapisan padatan

SOAL

Sebuah batang terdiri dari 3 lapis padatan sejajar. Ketiga padatan berlainan bahannya dan mempunyai ukuran seperti pada gambar 6-3. temperatur lingkungan adalah T_a pada permukaan 1 dan T_b pada permukaan 2.

Buatlah analisa tentang perubahan temperatur dalam sistem ini.

PENYELESAIAN

Analisa soal disatukan dengan penyelesaiannya.

Dalam masing-masing lapisan berlaku apa yang telah diperoleh dalam contoh sebelum ini, yaitu bahwa perubahan temperatur dalam masing-masing lapisan adalah linier (persamaan 6-29), sehingga dapat ditulis :

$$q = -k \frac{dT}{dx}$$

$$q_{1-2} = -k \int_1^2 \frac{dT}{dx}$$

$$q_{1-2} = k_{12} \frac{(T_1 - T_2)}{(x_2 - x_1)} \quad (6-32)$$

$$q_{2-3} = k_{23} \frac{(T_2 - T_3)}{(x_3 - x_2)} \quad (6-33)$$

$$q_{3-4} = k_{34} \frac{(T_3 - T_4)}{(x_4 - x_3)} \quad (6-34)$$

karena keadaan mantap, maka:

$$q_{1-2} = q_{2-3} = q_{3-4} = q_1$$

sehingga persamaan (6-32) s/d (6-34) dapat diubah menjadi :

$$T_1 - T_2 = \frac{q_1}{k_{12}} (x_2 - x_1) \quad (6-35)$$

$$T_2 - T_3 = \frac{q_1}{k_{23}} (x_3 - x_2) \quad (6-36)$$

$$T_3 - T_4 = \frac{q_1}{k_{34}} (x_4 - x_3) \quad (6-37)$$

Untuk perpindahan panas pada kedua permukaan dapat ditulis :

$$T_a - T_1 = \frac{q_1}{h_1} \quad (6-38)$$

$$T_4 - T_b = \frac{q_1}{h_4} \quad (6-39)$$

Kalau persamaan (6-35) s/d (6-39) dijumlahkan akan diperoleh :

$$T_a - T_b = q_1 \left\{ \frac{1}{h_1} + \frac{x_2 - x_1}{k_{12}} + \frac{x_3 - x_2}{k_{23}} + \frac{x_4 - x_3}{k_{34}} + \frac{1}{h_4} \right\}$$

Yang juga dapat ditulis dalam bentuk :

$$q_1 = \frac{T_a - T_b}{\left\{ \frac{1}{h_1} + \frac{x_2 - x_1}{k_{12}} + \frac{x_3 - x_2}{k_{23}} + \frac{x_4 - x_3}{k_{34}} + \frac{1}{h_4} \right\}} \quad (6-40)$$

Dalam teknik kimia persamaan (6-40) biasanya ditulis dalam bentuk :

$$q' = \frac{T_a - T_b}{\frac{1}{U_1 A_1}}$$

Atau
$$q' = U_1 A_1 (T_a - T_b) \quad (6-41)$$

q' dalam persamaan (6-41) adalah laju pindah panas, U_1 disebut koefisien perpindahan panas keseluruhan dan A_1 adalah luas permukaan yang dipakai untuk bandingan U_1 .

Dalam bentuk yang dinyatakan oleh persamaan (6-41) maka $(T_a - T_b)$ disebut Gaya Gerak Panas dan $\frac{1}{U_1 A_1}$ disebut tahanan panas.

Berdasarkan persamaan (5.40) dan (6-41), maka tahanan panas keseluruhan $\frac{1}{U_1 A_1}$ dapat dianggap sebagai jumlah masing-masing tahanan panas setempat.

Untuk penjumlahan itu diperlukan penyesuaian luas permukaan untuk masing-masing tahanan panas. Untuk konveksi diambil luas permukaan dimana luas konveksi itu terjadi; untuk konduksi diambil luas rata-rata antara kedua permukaan yang membatasi lapisan. Kalau luas rata-rata antara 1 dan 2 disebut A_{12} ; dst. Dapat ditulis :

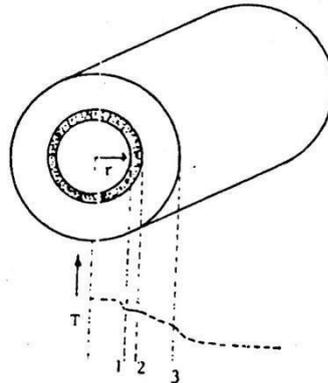
$$\frac{1}{U_1 A_1} = \frac{1}{h_1 A_1} + \frac{x_2 - x_1}{k_{12} A_{12}} + \frac{x_3 - x_2}{k_{23} A_{23}} + \frac{x_4 - x_3}{k_{34} A_{34}} + \frac{1}{h_4 A_4} \quad (6-42)$$

Untuk menghitung penyebaran temperatur dalam masing-masing lapisan, maka persamaan (6-29) diterapkan pada lapisan yang bersangkutan, seperti dalam persamaan (6-32) s/d (6-34)

c. Konduksi panas melalui dinding pipa.

SOAL

Dalam hal ini aliran fluida dalam pipa yang di insulasi sekurang-kurangnya ada empat tahanan panas, yaitu permukaan dalam pipa, dinding pipa, lapisan insulasi dan permukaan luar insulasi. Kalau temperatur fluida pada keadaan mantap lebih tinggi dari temperatur lingkungan, maka panas berpindah keluar ke arah radiasi. Buatlah analisa tentang penyebaran temperatur.



Gambar 5.3. Konduksi melewati pipa yang diinsulasi

ANALISA

Batas-batas sistem diterakan pada gambar 5.3. Dipilih sistem koordinat silinder.

PENYELESAIAN

Karena gradien temperatur pada permukaan selalu tidak diketahui dengan jelas, maka seluruh sistem seakan-akan terdiri dari padatan, seperti pada contoh b, sebelum ini. Maka berlaku persamaan energi untuk keadaan mantap :

$$k\Delta^2\tau = 0$$

Dengan menggunakan sistem koordinat silinder dapat diturunkan :

$$\frac{k}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{dT}{dr} \right) = 0 \quad (6-43)$$

Atau

$$0 = \frac{d}{dr} \left(r \frac{dT}{dr} \right)$$

Integrasi sekali memberikan :

$$r \frac{dT}{dr} = C_1 \quad (6-44)$$

Dengan syarat batas : 1) $r = R_1 \rightarrow r q = r_1 q_1$

$$r_1 q_1 = -r k \left. \frac{dT}{dr} \right|_{r=R_1}$$

Diperoleh :

$$C_1 = r \left. \frac{dT}{dr} \right|_{R_1} = -\frac{r_1 q_1}{k}$$

Maka persamaan (6-44) berubah menjadi :

$$r \frac{dT}{dr} = -\frac{r_1 q_1}{k} = C_1 \quad (6-45)$$

Dalam persamaan (6-45) mengapa yang diambil sebagai harga tetap dalam pemilihan syarat batas 1, r_1q_1 dan bukan q_1 seperti pada contoh sebelumnya? Dalam hal bentuk silinder q_1 tidak tetap karena luas permukaan lapisan tidak sama. Luas permukaan itu berbanding seperti jari-jari yang bersangkutan, karena panjangnya pipa sama. Ke arah nilai r yang besar fluksi panas menurun.

$$q_3 < q_2 < q_1$$

Karena $A_3 < A_2 < A_1$

Yang tetap ialah :

$$r_1q_1 = r_2q_2 = r_3q_3$$

Integrasi persamaan (6-45) dan penggunaan syarat batas : $r = R_1 \rightarrow T = T_1$, memberikan penyebaran temperatur sebagai berikut :

$$T - T_1 = \frac{r_1q_1}{k} \ln\left(\frac{R_1}{r}\right)$$

Kalau dalam soal ini dilakukan hal yang sama seperti pada contoh (3.b) maka akan didapat :

$$T_1 - T_2 = \frac{r_1q_1}{k_{12}} \ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right) \quad (6-47)$$

$$T_2 - T_3 = \frac{r_1q_1}{k_{23}} \ln\left(\frac{R_3}{R_2}\right) \quad (6-48)$$

Dan

$$\frac{T - T_a}{1} = \frac{q_1}{h_1} = \frac{r_1q_1}{r_1h_1} \quad (6-49)$$

$$\frac{T - T_2}{1} = \frac{q_3}{h_3} = \frac{r_1q_1}{r_3h_3} \quad (6-50)$$

Penjumlahan persamaan(6-47) s/d (6-50) menghasilkan :

$$q' = 2\pi r L q_1 = \frac{T_a - T_b}{\left\{ \frac{1}{r_1h_1} + \frac{\ln(R_2/R_1)}{k_{12}} + \frac{\ln(R_3/R_2)}{k_{23}} + \frac{1}{r_3h_3} \right\}}$$

Atau $q' = U_1 A_1 (T_a - T_b)$

d) Konduksi panas bersama-sama dengan pembangkitan panas oleh arus listrik.

Dalam penurunan persamaan energi tidak ditinjau pembangkitan panas lain dari pada karena gesekan antar molekul. Sumber pembangkitan panas lain itu mungkin arus listrik, reaksi kimia atau reaksi inti.

SOAL

Seutas kawat listrik mempunyai penampang lingkaran dengan jari-jari R dan konduktivitas listrik k_e ($\text{ohm}^{-1} \text{cm}^{-1}$). Kalau kawat ini dilewati arus sebesar 1 ampere (cm^{-2}), maka sebagian dari arus itu diubah menjadi panas secara irreversibel. Laju pembangkitan panas per satuan volum ialah :

$$\text{Re} = \frac{I^2}{k_e}$$

PENYELESAIAN

Persamaan energi (6-21) harus ditambah dengan satu suku lagi yaitu R_e . Penyesuaian dengan batas-batas sistem menghasilkan :

$$0 = \frac{k}{r} \frac{dT}{dr} \left(r \frac{dT}{dr} \right) + R_e$$

$$d \left(r \frac{dT}{dr} \right) = - \frac{R_e}{k} r dr \quad (6-52)$$

Integrasi dua kali menghasilkan :

$$T = \frac{R_e}{4k} r^2 + C_1 \ln r + C_2$$

Dengan syarat batas : 1) $r = 0 \rightarrow T = \text{terhingga}$

2) $r = R \rightarrow T = T_o$ (temperatur permukaan yang tetap)

Penggunaan syarat batas memberikan :

$$T - T_o = \frac{R_e R^2}{4k} \left\{ 1 - \left(\frac{r}{R} \right)^2 \right\} \quad (6-53)$$

Dari penyebaran temperatur ini dapat diturunkan besaran-besaran yang lain.

i. Kenaikan temperatur tertinggi dicapai pada $r = 0$

$$T_{\text{maks}} - T_o = \frac{R_e R^2}{4k}$$

ii. Kenaikan temperatur rata-rata

$$\langle T \rangle - T_o = \frac{\int_0^{2\pi} \int_0^R \{T(r) - T_o\} r dr d\theta}{\int_0^{2\pi} \int_0^R r dr d\theta}$$

$$\langle T \rangle - T_o = \frac{R_e R^2}{8k}$$

iii. Laju pindah panas pada permukaan :

$$q'_r|_{r=R} = 2\pi R L \cdot q_r|_{r=R}$$

$q_r|_{r=R}$ didapat dari integrasi sekali dari persamaan 6-52), penggunaan syarat batas pertama dan memberi harga R pada r , sehingga diperoleh :

$$q_r|_{r=R} = \frac{R_e R}{2}$$

$$q'_r|_{r=R} = \pi R^2 L R_e$$

Contoh ini menunjukkan analogi dengan penyelesaian aliran dalam pipa. Bentuk matematikanya dan syarat batasnya sama, yang berbeda hanya perubahannya, sifat fisis dan besaran lain. Dengan ini ditunjukkan adanya kemungkinan untuk menggunakan penyelesaian satu soal yang telah diketahui, sebagai penyelesaian soal lain, yang secara matematis sama. Untuk itu hanya diperlukan mengganti perubahannya. Perhatikan daftar yang berikut :

	Aliran dalam pipa	Arus listrik lewat kawat
Integrasi pertama memberikan penyebaran	τ_{rz}	q_r
Integrasi kedua memberikan penyebaran	v_z	$T - T_o$

Syarat batas pada $r = 0$	$\tau_{rz} = \text{terhingga}$	$q_r = \text{terhingga}$
Syarat batas pada $r = R$	$v_z = 0$	$T - T_o = 0$
Sifat fisis yang mengenai perpindahan	μ	k
Suku tentang sumber	$(P_o - P_L)/L$	Re
Anggapan	$\mu = \text{tetap}$	$k, k_e = \text{tetap}$

4. RINGKASAN DAN SOAL-SOAL

Cara-cara panas berpindah :

- Konduksi : $\dot{q} = -k\Delta T$
- Konveksi : $q = h(T_p - T_f)$
- Radiasi : $q = \sigma T^4$

Persamaan energi :

$$\rho C \frac{DT}{Dt} = -(\nabla \cdot \dot{q}) - T \left(\frac{\partial p}{\partial T} \right) (\nabla \cdot \vec{v}) - \mu \Phi$$

Penggunaan persamaan energi dalam teknik kimia. Penyelesaian soal secara analogi.6.2 dalam diktat ini.

Jawab : ada 3

1. Sebuah pipa logam, yang di insulasi, dilalui uap air yang tetap tekanannya. Temperatur permukaan pipa sebelah dalam adalah merata dan tetap pada T_1 , sedang temperatur permukaan insulasi sebelah luar adalah merata dan tetappada T_2 . Besarnya temperatur ditempat lain tidak diketahui. Carilah penyebaran temperatur dalam dinding pipa dan lapisan insulasi.

Jawab : pipa, $T - T_1 = \frac{r_0 q_0}{k_p} \ln \frac{r}{r_1}$

Insulasi, $T - T_2 = \frac{r_0 q_0}{k_{in}} \ln \frac{r_2}{r}$

2. Dalam soal No.2, diketahui, bahwa $T_1 = 110^\circ\text{C}$ dan $T_2 = 40^\circ\text{C}$.
 - a) Hitunglah temperatur permukaan antara pipa dan insulasi.
 - b) Hitunglah rugi panas per meter pipa.

Keterangan : diameter-dalam pipa = 20,0 cm

Diameter luar pipa = 23,0 cm

Tebal insulasi = 11,5 cm

$k \text{ logam} = 26.0 \text{ W}$

$\text{m}^{-1}\text{C}^{-1}$ $k \text{ insulasi} = 0.2 \text{ W}$

$\text{m}^{-1}\text{C}^{-1}$

Jawab : a) 109.9°C

b) 126.7 W

- 4a. Carilah penyebaran temperatur $T(r)$ dalam suatu fluida taktermampatkan, yang

mengalir secara berlapis dan mantap, dalam suatu pipa dengan jari-jari R . Temperatur dinding pipa tetap pada T_o dan $T_o < T$. μ dan k fluida tidak berubah dengan temperatur.

Nyatakan jawaban anda dengan menggunakan bilangan Brinkman : $Br = \mu v_{z,\text{mak}}^2 / k(T_{\text{maks}} - T_o)$.

Jawab :

$$\frac{(T - T_o)/(T_{\text{maks}} - T_o)}{Br} = \frac{1 - \left(\frac{r}{R}\right)^4}{4}$$

5. Carilah penyebaran temperatur $T(r)$ dalam suatu fluida taktermampatkan, yang mengalir secara berlapis dan mantap, dala suatu saluran anulus dengan jari-jari R_1 dan R_2 . Temperatur dinding anulus tetap pada T_1 dan T_2 ($T_1 > T_2$) μ dan k fluida tetap. Abaikan panas yang timbul karena gesekan :

Jawab :
$$\frac{T_1 - T}{T_1 - T_2} = \frac{\ln R_1 - \ln r}{\ln R_1 - \ln R_2}$$

6. Hitunglah panas yang ditimbulkan per meter pipa, oleh gesekan molekular dalam sistem aliran dari soal nomor 4, jika fluidanya air, $T_o = 25^\circ\text{C}$ dan $R = 5$ cm. Air mengalir dengan selisih tekanan sebesar 100 Nm^{-2} per 1000 m pipa. Bandingkan jawaban anda dengan besarnya rugi panas pada soal nomor 3. Hitunglah bilangan Brinkman.

Jawab : 2.10^{-4} W ; $Br = 4$.

7. Jika udara disekitar pipa uap air dalam soal nomor 3 mempunyai temperatur rata-rata sebesar 25°C , hitunglah besarnya koefisien pindah panas h untuk permukaan insulasi.

Jawab : $0.058 \text{ W m}^{-2} \text{ }^\circ\text{C}^{-1}$

8. Hitunglah selisih temperatur rata-rata dan temperaturmaksimum fluida dalam soal nomor 6.

Jawab : $T_{\text{maks}} - \langle T \rangle = 0.53^\circ\text{C}$

- 9a. Suatu cairan mengalir secara berlapis dalam sebuah pipa sepanjang L , yang

dari luar dipanasi oleh uap air. Aliran masuk pipa dengan temperatur yang merata T_1 . Uap air memanaskan pipa secara merata, sehingga temperatur dinding pipa sebelah dalam, disemua tempat dan pada setiap saat, adalah T' . $T' > T^2$. Perubahan temperatur ke arah x (= sepanjang pipa) dianggap linier. Tekanan aliran sewaktu masuk pipa = P_o , dan sewaktu keluar = P_L .

Kalau keadaan mantap, carilah penyebaran temperatur dalam aliran itu pada waktu meninggalkan pipa.

Jawab :
$$\frac{T - T_1}{T' - T_1} = \frac{16}{3} \left\{ \frac{k_z}{R^2 v_{z,m}} + \left(\frac{r}{2R}\right)^2 - \frac{r^4}{2R^4} \right\}$$

10. Dengan menggunakan hasil perhitungan soal nomor 8, hitunglah besarnya koefisien pindah panas h pada permukaan pipa sebelah dalam dari soal nomor 6.

Jawab : $5.4 \cdot 10^{-4} \text{ W m}^{-2} \text{ }^\circ\text{C}^{-1}$

4 KONDUKSI PANAS SECARA TAKMANTAP.

Dalam teknik dijumpai beberapa operasi dan masalah yang menyangkut konduksi panas secara takmantap. Dalam hal ini hanya akan dibahas dua contoh yang sederhana. Dengan bekal pengetahuan ini kiranya tidak sukar untuk mempelajari soal ini secara lebih mendalam dan lebih luas, dalam kedua buku yang dianjurkan atau buku-buku lain.

a. Pemanasan lempeng yang setengah takterhingga

SOAL

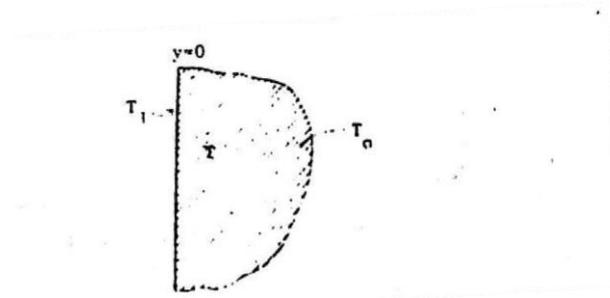
Sebuah lempeng padatan yang terletak antara $y = 0$ dan $y = \infty$, mula-mula mempunyai temperatur merata T_0 . Pada waktu $t = 0$ permukaan pada $y = 0$ mendadak melonjak temperaturnya menjadi T_1 dan bertahan pada temperatur itu untuk seterusnya ($t > 0$). Carilah fungsi penyebaran temperatur yang bergantung pada waktu $T(y,t)$.

ANALISA

Fungsi penyebaran temperatur bergantung pada dua perubah y dan t . Karena itu penyelesaian persamaan diferensialnya akan lebih sukar dari jika hanya ada satu perubah.

Skema sistem adalah seperti pada gambar 6.4. Sistem koordinat dipilih sistem tegaklurus. Batas-batas sistem adalah sebagai berikut :

- Tidak ada aliran, $\vec{v} = 0$
- Tidak ada tekanan, $\frac{\partial p}{\partial T} = 0$
- Densiti tetap, $y = 0$



Gambar 6.4. Lempeng setengah tak terhingga

RENCANA

Dalam cara penyelesaian akan diperkenalkan cara penggunaan perubah tanpa dimensi. Persamaan energi harus disesuaikan dengan batas-batas sistem, seperti dilakukan dengan persamaan gerak. Persamaan gerak tidak perlu dianalisa, karena persamaan energi sudah memuat \vec{v} . Rencana penyelesaian adalah sebagai berikut :

- i. Sesuaikan persamaan energi pada atas-batas sistem.
- ii. Tetapkan syarat-batas.
- iii. Dengan menggunakan perubah tanpa dimensi, susun persamaan difrensial baru dan syarat batas baru.
- iv. Integrasikan dan selesaikan persamaan yang baru.

PENYELESAIAN

Dengan memasukkan batas-batas sistem kedalam persamaan energi diperoleh persamaan diferensial parsial yang berikut :

$$\bar{\rho} \bar{c}_p \frac{\partial p}{\partial T} = k \nabla^2 T$$

Dalam penyelesaian persamaan diferensial parsial sering digunakan penggantian perubah menjadi perubah tanpa dimensi, agar bentuk persamaan itu menjadi sederhana.

Disini akan dipakai

$$\alpha = \frac{k}{\rho C_p}$$

$$\theta = \frac{T - T_o}{T_1 - T_o}$$

Untuk memasukkan perubah-perubah baru kedalam persamaan (6-54) diperlukan persamaan-persamaan pengubah, yakni :

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = \frac{\partial T}{\partial t} \frac{T_1 - T_o}{T_1 - T_o} \quad (6-55)$$

$$\nabla^2 T \text{ menjadi } \frac{\partial^2 T}{\partial y^2}$$

$$\frac{\partial T}{\partial y} = (T_1 - T_o) \frac{\partial \theta}{\partial y}$$

$$\frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = (T_1 - T_o) \frac{\partial^2 \theta}{\partial y^2} \quad (6-56)$$

Persamaan (6-55) dan 6-56) disubstitusikan kedalam persamaan (6-54).

Dengan demikian persamaan (6-54) berubah menjadi :

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = \alpha \frac{\partial^2 \theta}{\partial y^2} \quad (6-57)$$

Syarat-syarat batas untuk sistem ini adalah :

- Syarat awal : pada $t < 0$, $\theta = 0$ untuk semua y .
- Syarat batas 1 : pada $y = 0$, $\theta = 1$ untuk semua $t > 0$
- Syarat batas 2 : pada $y = \infty$, $\theta = 0$ untuk semua $t > 0$

Persamaan-persamaan diferensial yang mengandung dua perubah bebas dapat diselesaikan menurut salah satu dari dua cara, yaitu :

- penyatuan perubah, atau
- pemisahan perubah

Contoh ini akan diselesaikan dengan cara penyatuan perubah, yaitu y dan t disatukan menjadi perubah baru $n = y/\sqrt{4\alpha t}$. θ dianggap satu fungsi n ; $\theta = \theta(n)$. Supaya persamaan 6-57) dapat diubah dengan mudah menjadi persamaan dalam θ dan n , maka harus dibuat persamaan-persamaan pengubah.

$$n = y/\sqrt{4\alpha t} \quad 2$$

$$dn = (4\alpha t)^{-1/2} dy - y(4\alpha)^{-1/2} \frac{dt}{t^2}$$

$$t^{-3/2}dt$$

—

$$\frac{\partial n}{\partial t} \Big|_{y=\text{tetap}} = -\frac{y}{2t\sqrt{4\alpha t}} = -\frac{n}{2t}$$

$$\frac{\partial n}{\partial y} \Big|_{t=\text{tetap}} = -(4\alpha t)^{-1/2} = -\frac{n}{y}$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial n} = \phi' = \frac{\partial \phi}{\partial t} \cdot \frac{\partial t}{\partial n} = -\frac{2t}{n} \frac{\partial \phi}{\partial t}$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} = -\frac{n}{2t} \phi'$$

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} = \frac{n}{y^2} \phi''$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = \frac{\partial \phi}{\partial t} = -\frac{n}{2t} \phi' \quad (6-58)$$

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} = \frac{n^2}{y^2} \phi'' \quad (6-59)$$

Dengan menggunakan persamaan (6-58) dan (6-59), persamaan (6-5) diubah menjadi :

$$\phi'' + 2n\phi' = 0 \quad (6-60)$$

Syarat batas yang baru dibentuk dengan memasukkan syarat awal dalam syarat batas kedua :

Syarat batas 1 : pada $n = 0$, $\phi = 1$

Syarat batas 2 : pada $n = \infty$, $\phi = 0$

Kalau digunakan :

$$\phi' = \psi \text{ dan}$$

$$\phi'' = \psi'$$

Dan disubstitusikan kedalam persamaan (6.60) akan diperoleh persamaan diferensial orde kesatu.

$$\psi' + 2n\psi = 0$$

Yang sesudah integrasi memberikan penyelesaian :

$$\psi = \phi' = C_1 e^{-n^2}$$

Integrasi kedua memberikan penyelesaian :

$$\phi = C_1 \int_0^n e^{-n^2} dn + C_2$$

Penggunaan kedua syarat batas memberikan :

$$\frac{T-T_0}{T_1-T_0} = \theta = 1 - \frac{\int_0^n e^{-n^2} dn}{\int_0^\infty e^{-n^2} dn} = 1 - \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^n e^{-n^2} dn \quad (6-61)$$

Karena $\theta = \theta = \frac{T-T_0}{T_1-T_0}$

Suku kedua dalam ruas kanan persamaan (6-61) disebut fungsi kesalahan (error function) disingkat erf n. Seluruh ruas kanan, jadi $1 - \text{erf } n$, disebut komplementen fungsi kesalahan (complementary error function), disingkat erfc n. Fungsi kesalahan adalah fungsi kontinu yang nilainya berubah dari 0 sampai 1. Fungsi ini sering dipakai dan nilainya untuk berbagai nilai...sudah dimasukkan daftar, yang dimuat dalam beberapa buku, sehingga dapat dihitung dengan mudah.

b. pemanasan lempeng dengan tabel terhingga.

SOAL

Sebuah lempeng padat yang terletak antara $y = -b$ dan $y = +b$, mula-mula mempunyai temperatur merata T_0 . Pada waktu $t = 0$ kedua permukaan pada $y = -b$ dan $y = +b$ mendadak melonjak temperaturnya menjadi T_1 dan bertahan pada temperatur itu untuk seterusnya. Carilah fungsi penyebaran temperature $T(y,t)$.

PENYELESAIAN

Karena sama dengan soal 4a. Analisa dan Rencana ditiadakan. Lagi pula Penyelesaian dibuat singkat. Harap uraian ini diikuti dengan menghitung sendiri bagian-bagian yang dilampau.

Batas-batas sistem pada contoh soal 4a. berlaku juga disini. Dengan menggunakan perubah-perubah tanpa dimensi yang berikut :

$$\theta = \frac{T_1-T}{T_1-T_0}, \text{ temperatur tanpa dimensi}$$

$$n = \frac{y}{b}, \text{ jarak tanpa dimensi}$$

$$\tau = \frac{\alpha t}{b^2}, \text{ waktu tanpa dimensi}$$

Diperoleh persamaan diferensial yang sederhana bentuknya :

$$\frac{\partial \theta}{\partial \tau} = \frac{\partial^2 \theta}{\partial n^2} \quad (6-62)$$

Syarat awal, pada $\tau = 0, \theta = 1$

Syarat batas 1&2 : pada $n = \pm 1, \theta = 0$

Persamaan (6-62) diselesaikan dengan cara pemisahan perubah. Untuk pemisahan itu dianggap, bahwa fungsi yang dicari merupakan hasil perkalian dua fungsi sebagai berikut :

$$\theta(n, \tau) = f(n) \cdot g(\tau) \quad (6-63)$$

Dengan menggunakan persamaan (6-63), persamaan (6-62) diubah menjadi :

$$\frac{1}{g} \frac{dg}{d\tau} = \frac{1}{f} \frac{d^2f}{dn^2} \quad (6-64)$$

Untuk penyelesaian persamaan (6-64) dipersilahkan membaca buku Bird dkk. Penyelesaiannya berbentuk deret takterhingga, yaitu :

$$\frac{T_1 - T}{T_1 - T_0} = 2 \sum_n \frac{(-1)^n}{(n + \frac{1}{2})} \frac{e^{-(n + \frac{1}{2})^2 \pi^2 \alpha t / b^2}}{\pi y} \cos\left(\frac{(n + \frac{1}{2}) y}{b}\right) \quad (6-65)$$

Deret ini juga disajikan dalam bentuk nomogram, selain untuk lempeng juga untuk silinder, bola dll.

5. PERPINDAHAN PANAS SECARA KONVEKSI

Pada perbatasan permukaan padat dan fluida, panas yang dipindahkan secara konveksi. Pada Bagian 3 hal ini sudah disinggung. Dalam menyusun syarat batas pada pertemuan permukaan padat dan fluida akan dijumpai salah satu atau lebih dai hal-hal dibawah ini.

- i. Temperatur permukaan itu diketahui tetap, $T = T_0$
- ii. Fluksi panas pada permukaan itu diketahui, $q = q_0$
- iii. Fluksi panas pada pertemuan permukaan padat dan fluida, mengikuti persamaan : $q = h(T_{\text{padat}} - T_{\text{fluida}})$
- iv. Fluksi panas dan temperatur pada pertemuan dua permukaan padat diketahui.

Dalam bagian ini akan dibahas hal ke-iii saja, perpindahan panas secara konveksi. Dalam konveksi panas dikena dua cara perpindahan, yang merupakan kedua batas perpindahan panas secara konveksi yaitu :

- Konveksi paksa, dan
- Konveksi bebas atau konveksi alamiah.

Dalam konveksi paksa suah tentu konveksi bebas mungkin terjadi juga, akan tetapi pengaruhnya dapat diabaikan terhadap pengaruh konveksi paksa. Pada halaman berikut ini kedua carakonveksi itu dibandingkan.

Konveksi Panas

Konveksi panas	Konveksi beban
Panas dipindahkan karena dibawah oleh massa yang dialirkan oleh satu alat	Panas dibawah serta oleh fluida yang bergerak ke atas karena perbedaan temperature
Sifat aliran ditentukan oleh satu alat	Sifat aliran ditentukan oleh gaya apung fluida yang berbeda density
penyebaran kecepatan dicari lebih dahulu, kemudian baru dicari penyebaran temperature	Penyebaran kecepatan dan temperature saling berhubungan
Bilangan nusselt bergantung pada bilangan Reynolds dan bilangan prandtl	Bilangan nuselt bergantung pada bilangan Grashof dan bilangan prandtl

a. Konveksi paksa

Sebagai contoh akan dibahas perpindahan panas secara konveksi paksa dalam keadaan mantap dari suatu fluida dalam pipa. Suatu fluida dengan sifat-sifat fisis yang tetap (ρ, μ, k, C_p) mengalir secara berlapis dalam pipa dengan jari-jari R . pada daerah $z > 0$. temperature fluida itu merata T_0 . dalam daerah $z < 0$ sampai $z = L$ pada permukaan dinding pipa masuk fluksi panas yang tetap q_1 , karena mendapat pemanasan tetap sepanjang L . bagaimanakah penyebaran temperature dalam fluida sepanjang L itu ?

lebih dahulu dicari penyebaran kecepatan. Hal itu dapat diperoleh dengan mudah dengan menggunakan persamaan gerak. Hasilnya ialah :

$$V_z = \frac{(P_o - P_L)R^2}{4\mu L} \left(1 - \left(\frac{r}{R}\right)^2\right) \dots\dots\dots (6-24)$$

Atau $V_z = V_z$, maka $\left(1 - \left(\frac{r}{R}\right)^2\right)$

Dalam menerapkan persamaan energi (6-21) harus diingat, bahwa panas selain berpindah secara radial (q_R) juga berpindah secara aksial (q_z) sehingga berlaku kedua komponen hukum Fourier.

$$q_r = -k \frac{\partial T}{\partial r} \dots\dots\dots (6.66)$$

$$q_z = -k \frac{\partial T}{\partial z} \dots\dots\dots (6.67)$$

Persamaan diferensial yang diperoleh ialah :

$$\rho C_p v \frac{\partial T}{\partial z} = - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r q_r) - \frac{\partial q_z}{\partial z} \dots\dots\dots (6.68)$$

Dengan pertolongan persamaan (6-24), (6-66) dan (6-67) maka persamaan (6-68) diubah menjadi :

$$\rho C_p v_m \left(1 - \left(\frac{r}{R}\right)^2\right) \frac{\partial T}{\partial z} = k \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial T}{\partial r} \right) + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right) \dots\dots\dots (6.69)$$

$V_m = V_z$, maka pengaruh konduksi kearah z biasanya kecil jika dibandingkan dengan konveksi kearah z , karena itu $\frac{\partial^2 T}{\partial z^2}$ dapat diabaikan terhadap $\frac{\partial T}{\partial z}$. (Ingat bahwa hal ini tidak selalu dapat dilakukan) hal ini sebenarnya sama dengan menganggap. Bahwa perubahan temperature ke- z linier :

$T(z) = az + \beta$, maka diperoleh :

$$\rho C_p v_m \left(1 - \left(\frac{r}{R}\right)^2\right) \frac{\partial T}{\partial z} = k \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial T}{\partial r} \right) \dots\dots\dots (6-70)$$

Syarat batas 1. pada $r = 0$, $T =$ terhingga

Syarat batas 2. pada $r = R$, $-k \frac{\partial T}{\partial r} = q_1 = \text{tetap}$

Syarat batas 3. pada $z = 0$, $T = T_0$

Dengan menggunakan perubahan-perubahan tak berdimensi yang berikut, persamaan (6-70) diubah menjadi persamaan (6-71) :

$$\theta = \frac{T - T_0}{q_1 R/k}$$

$$\theta = r / R$$

$$\theta = \frac{zk}{\rho C v R^2}$$

$$(1 - \theta^2) \frac{\partial \theta}{\partial \theta} = \frac{1}{8} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(8 \frac{\partial \theta}{\partial \theta} \right) \dots \dots \dots (6.71)$$

Syarat batas 1. pada $\theta = 0$, $\theta = \text{tehingga}$

Syarat batas 2, pada $\theta = 1$, $\frac{\partial \theta}{\partial \theta} = 1$

Syarat batas 3, pada $\theta = 0$, $\theta = 0$

Syarat batas 3 sepiantas memang layak dipakai. Akan tetapi kalau ditinjau lebih dalam tidak akan dapat dipenuhi seluruhnya.

Pada $z = 0$ dan $r < R$ memang $T = T_0$, akan tetapi pada $z = 0$ dan $r = R$, ada fluksi panas yang tetap $q = -k \frac{\partial T}{\partial r}$, jadi ada gradient temperature atau ada perubahan temperature. Memang hal ini

adalah keadaan batas, namun dengan demikian syarat batas 3 tidak dapat dipenuhi seluruhnya.

Sebagai penggantinya diambil syarat batas 3 berdasarkan neraca panas :

Panas yang masuk melalui dinding pipa = selisih panas dalam fluida antara $z = 0$ dan $z = L$ atau :

$$\int_0^L \int_0^R \int_0^{2\pi} \rho C (T - T_0) v r dr d\theta dz$$

Atau dalam perubahan tanpa dimensi :

Persamaan (6.71) akan diselesaikan dengan cara pemisahan perubah dan dianggap bahwa 0 merupakan jumlah dua fungsi

$$\theta = C_0 + \theta(\delta) \dots \dots \dots (6.72)$$

Penggunaan persamaan (6.71) menjadi :

$$\frac{1}{8} \frac{d}{d\theta} \left(8 \frac{d\theta}{d\theta} \right) = C (1 - \theta^2) \dots \dots \dots (6.73)$$

Integral dua kali dan penggunaan syarat batas 1.2 dan #' menghasilkan :

$$0 = -4\theta - \theta^2 + \frac{1}{4}\theta^4 + \frac{7}{24} \dots \dots \dots (6.74)$$

Dari persamaan (6-74) dapat dihitung T dan juga dapat diturunkan besaran-besaran lain. Dalam aliran fluida, dengan ρ dan C_p tetap. Ada dua pengertian temperature rata-rata yaitu :

$$\langle T \rangle = \frac{\int_0^{2\pi R} \int_0^0 T(r) r dr d\theta}{\int_0^{2\pi R} \int_0^0 v_z(r) r dr d\theta}$$

$$\frac{\langle v T \rangle_z}{\langle v_z \rangle} = \frac{\int_0^{2\pi R} \int_0^0 v_z(r) T(r) r dr d\theta}{\int_0^{2\pi R} \int_0^0 v_z(r) r dr d\theta} = T_b$$

Baik $\langle T \rangle$ maupun T_b merupakan fungsi z. T_b disebut bulk temperature, dan kadang-kadang juga cup mixing temperature atau Flow-average temperatur.

B. Konveksi bebas

Dalam contoh ini, suatu fluida berada antara dua permukaan tegak, yang berjarak 2b. dinding pada $y = -b$ temperaturenya dipertahankan pada T_1 dan temperature dingin pada $y = +b$ dipertahankan pada T_2 . fluida mula-mula diam, akan tetapi karena ada gradient temperature fluida dekat dinding panas naik dan fluida dekat dinding dingin turun. Dianggap, bahwa laju alir volum fluida ke atas sama dengan laju alir volum ke bawah. Kemudian dianggap pula bahwa, bagian dinding yang ditinjau terletak jauh dari keempat tepinya, sehingga temperatue dapat dianggap merupakan fungsi y saja.

Untuk k yang tetap penerapan persamaan energi memberikan :

$$k \frac{d^2 T}{dy^2} = 0 \dots \dots \dots (6.75)$$

Syarat batas 1. pada $y = -b$, $T = T_1$

Syarat batas 2, pada $y = +b$, $T = T_2$

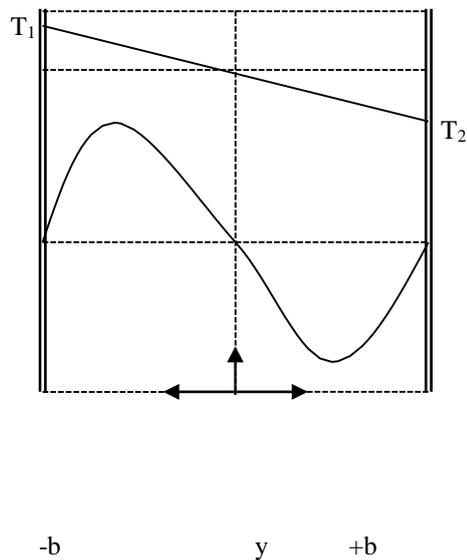
Dan diperoleh penyelesaian yang berikut :

$$T = T_m - \Delta T \left(\frac{y}{b}\right) \dots \dots \dots (6.76)$$

Dimana :

$$\Delta T = T_1 - T_2$$

$$T_m = (T_1 + T_2)$$



Penyebaran kecepatan dapat diperoleh dengan membuat neraca momentum, yang menghasilkan :

$$\mu \frac{d^2 v_z}{dy^2} = \frac{dp}{dz} + \rho g \dots \dots \dots (6.77)$$

Viskositas dianggap tetap.

Fungsi perubahan p dicari dengan menguraikan p dalam deret Taylor selancar suatu temperature dandingkan T , yang untuk sementara belum ditentukan :

$$\begin{aligned} \rho &= \rho \Big|_T + \frac{\partial \rho}{\partial T} (T - T) + \dots \dots \dots \\ &= \rho - \rho \beta (T - T) + \dots \dots \dots (6.78) \end{aligned}$$

ρ adalah density pada T dan β adalah koefisien pemuaiian volum pada T .

Dalam deret taylor diatas suku ketiga dan seterusnya. Diabaikan, jika persamaan (6-78) disubstitusikan ke dalam persamaan (6-77), diperoleh :

$$\mu \frac{d^2 v_z}{dy^2} = \frac{dp}{dz} + \rho - \rho \beta g (T - T) \dots \dots \dots (6.79)$$

Kalau, dianggap bahwa gradient tekanan itu hanya disebabkan oleh berat fluida diantara dua dinding itu, maka :

$$\frac{dp}{dz} = -\rho g$$

Dan persamaan (6-79) berubah menjadi :

$$\mu \frac{d^2 v_z}{dy^2} = -\rho \beta g (T - T_m) \dots\dots\dots (6-80)$$

Yang berarti, bahwa gaya gesekan molekul tepat diimbangi oleh gaya apung. Persamaan (6-76) dimasukkan ke dalam persamaan (6-80) dan menghasilkan :

$$\mu \frac{d^2 v_z}{dy^2} = -\rho \beta g (T_m - T) \left[1 - \frac{\Delta T}{T_m} \frac{y}{b} \right] \dots\dots\dots (6.81)$$

Dengan menggunakan kedua syarat batas :

Syarat batas 1 : pada $y = -b$, $v_z = 0$

Syarat batas 2 : pada $y = +b$, $v_z = 0$

Persamaan (6-81) dapat diselesaikan menjadi :

$$V_z = \frac{\rho \beta g b^2 \Delta T}{12\mu} (n^3 - An^2 - n + A) \dots\dots\dots (6.82)$$

Dimana :

$$n = \frac{y}{b}$$

$$A = 6 \frac{T_m - T}{\Delta T}$$

T atau A dapat dicari, kalau digunakan anggapan, bahwa laju alir volum ke atas sama dengan ke bawah. Atau laju alir volum total ke arah z sama dengan nol.

$$\int_{-1}^{+1} v_z dn = 0 \dots\dots\dots (6.83)$$

Kalau persamaan (6-82) disubstitusikan ke dalam persamaan (6-83) dan dilakukan integrasinya, maka didapat :

$$-\frac{2}{3}A + 4A = 0$$

Yang menghasilkan $A = 0$ atau $T = T_m$. akhirnya penyebaran kecepatan v_z menjadi :

$$V_z = \frac{\rho \beta g b^2 \Delta T}{12\mu} (\eta^3 - \eta) \dots\dots\dots (6.84)$$

Persamaan 6-84 dapat juga dinyatakan dalam perubah dan bilangan tanpa dimensi:

$$\phi = \frac{bv_z \rho}{\mu}, \text{ kecepatan tanpa dimensi}$$

$$\eta = \frac{y}{b}, \text{ jarak tanpa dimensi}$$

$$Gr = \frac{\rho^{-2} \beta g b^3 \Delta T}{\mu^2}, \text{ bilangan Grashof}$$

Sehingga menjadi :

$$\phi = \frac{1}{12} Gr(n^3 - n) \dots \dots \dots (6-85)$$

c. Persamaan Empiris

koefisien pindah panas permukaan h merupakan sifat kemampuan memindahkan panas untuk tempat pertemuan suatu permukaan dalam fluida. Yang selain dipengaruhi oleh sifat-sifat permukaan dan fluida, juga masih bergantung pada aliran dan temperature.

Karena banyaknya factor yang berpengaruh tidak ada jalan lain untuk memperoleh nilai h dari pada melakukan percobaan untuk menentukannya. Banyak sekali percobaan yang telah dilakukan berbagai peneliti dengan tujuan memperoleh persamaan empiris yang dapat dipakai untuk memperkirakan nilai h dalam masalah yang serupa, misalnya untuk keperluan perancangan alat. Dilakukannya percobaan-percobaan itu juga didorong oleh pentingnya diketahui nilai h yang dapat diandalkan, untuk keperluan perhitungan perpindahan panas.

Hasil penelitian berbagai orang sudah banyak yang disatukan dalam persamaan yang telah diterima dan dipakai orang banyak. Persamaan-persamaan itu biasanya berlaku dalam batas-batas aliran tertentu atau untuk keadaan tertentu. Persamaan dinyatakan dalam bilangan Nusselt sebagai fungsi dari bilangan Prandtl dan satu bilangan tanpa dimensi yang khusus berhubungan dengan sifat aliran bilangan Reynolds untuk konveksi paksa, dan bilangan Grashof untuk konveksi bebas.

Dibawah ini diberikan ringkasan beberapa contoh persamaan empiris. Dalam menggunakan persamaan empiris perlu diingat, bahwa persamaan itu adalah hasil percobaan dan karena itu akan memuat kesalahan-kesalahan percobaan itu. Kesalahan nisbi dari 10% tidak jarang dijumpai dalam perhitungan nilai h dari persamaan-persamaan itu :

$$\text{Bilangan Nusselt} = Nu = \frac{hd}{k}$$

$$\text{Bilangan Pranditi} = Pr = \frac{Op\mu}{k}$$

$$\text{Bilangan Reynolds} = Re = \frac{\rho v d}{\mu} = \frac{dG}{\mu}$$

$$\text{Bilangan Grashof} = Gr = \frac{\rho^2 \beta g b^3 \Delta T}{\mu^2} = \frac{\rho g b^3 \Delta \rho}{\mu^2}$$

Untuk aliran berlapis dalam pipa berlaku :

$$Nu = 1.86 (Re \cdot \frac{d}{L})^{1/3} \left(\frac{\mu b}{\mu_w} \right)^{0.14} \dots \dots \dots (6.86)$$

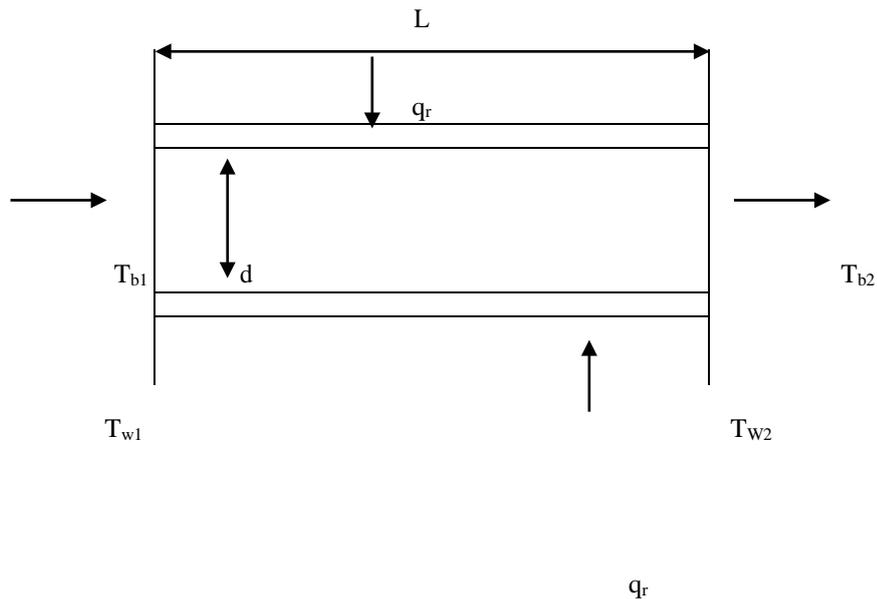
μ_b dihitung untuk temperatur rata-rata fluida T_b dan μ_w dihitung untuk temperature dinding. Jika tidak banyak perbedaan antara μ_b dan μ_w , factor μ_b/μ_w boleh dihilangkan.

Untuk aliran yang sangat bergolak ($Re > 20.000$) :

$$Nu = 0,026 (Re)^{0,8} (Pr)^{1/3} \left(\frac{\mu_b}{\mu_w} \right)^{0,14} \dots\dots\dots(6.87)$$

Sering juga persamaan empiris itu disajikan dalam bentuk grafik.

Dalam perhitungan perpindahan panas secara konveksi untuk pipa, dengan menggunakan hukum pendinginan Newton : $q' = hA (T_{permukaan} - T_{fluida})$ orang menghadapi beberapa pemilihan dalam menentukan ΔT , karena ΔT itu berubah sepanjang pipa (lihat persamaan (6.74)). Definisi untuk h dengan demikian bergantung pada pemilihan ΔT . dibawah ini disebut beberapa definisi untuk h .



Gambar 5.6. Perpindahan panas dalam pipa.

$$Q' = h_1 (\pi d L) (T_{w1} - T_{b1})$$

$$Q' = h_a (\pi n d L) \frac{ (T_{w1} - T_{b1}) + (T_{w2} - T_{b1}) }{ 2 }$$

$$Q' = h_{ln} (\pi d L) \frac{ (T_{w1} - T_{b1}) + (T_{w2} - T_{b2}) }{ \frac{ (T_{w1} - T_{b1}) }{ \ln(T_{w2} - T_{b2}) } }$$

$$Dq' = h_{loc} (\pi d dz) (T_w - T_b)$$

Dalam teknik kimia dipakai h_{ln} karena nilainya makin tetap. Bila L/d makin panjang. Juga koefisien pindah panas keseluruhan U_{ln} yang dipakai dalam teknik kimia, sehingga persamaan perpindahan panas untuk teknik kimia adalah :

$$Q' = U_{ln}A(\Delta T)_{ln} \dots \dots \dots (6-88)$$

Atau biasanya dipakai :

$$Q' = UA (LMTD)$$

Dimana LMTD = logarithmic mean temperature difference

6. RADIASI

Berbeda dari konduksi dan konveksi, dalam radiasi energi berpindah tanpa memerlukan zat pengantar. Radiasi adalah pancaran energi secara gelombang elektromagnetik dengan kecepatan cahaya. Daerah panjang gelombang yang dapat disebut radiasi panas terutama terletak antara 0,1 – 10 mikron. Daerah ini hanya sebagian kecil dari keseluruhan radiasi elektromagnetik.

Kalau λ adalah panjang gelombang dan c kecepatan cahaya dan ν frekuensi, maka berlaku hubungan :

$$\lambda = \frac{c}{\nu} \dots \dots \dots (6.89)$$

$$C = 2,9979 \cdot 10^{10} \text{ cm detik}^{-1}$$

Suatu gelombang elektromagnetik dengan frekuensi ν biasanya digambarkan sebagai gerakan foton, yaitu “benda” dengan massa nol, muatan nol dan energi sebesar e , dengan hubungan :

$$C = h\nu \dots \dots \dots (6-90)$$

H = tetapan planck = $6,624 \cdot 10^{-27}$ erg.detik

Energi foton itu dapat dipancarkan (emisi), dapat diserap (absorpsi) oleh suatu permukaan dan dapat juga dipantulkan (refleksi). Dalam radiasi panas dikenal beberapa benda bandingan. Suatu benda atau permukaan yang terkena radiasi panas, biasanya menyerap hanya sebagian dari energi yang sampai, dengan hubungan :

$$A = \frac{q^{(a)}}{q^{(m)}} ; a_{\nu} = \frac{q\nu^{(a)}}{q\nu^{(m)}} \dots \dots \dots (6.91)$$

A = koefisien absorpsi, $q^{(a)}$ = energi yang diserap

$Q^{(m)}$ = energi yang masuk

Untuk benda-benda nyata a_{ν} tidak sama untuk berbagai frekuensi.

Benda kelabu (gray body) ialah benda hipotesis yang mempunyai a_{ν} sama, tetapi lebih kecil dari 1. untuk semua frekuensi dan temperature. Untuk semua frekuensi dan semua temperature. Benda Hitam (black body) ialah hipotesis yang mempunyai $a_{\nu} = 1$ untuk semua frekuensi dan temperature. Benda Hitam (black body) ialah benda hipotesis yang mempunyai $a_{\nu} = 1$ untuk

semua frekuensi dan temperature. Semua permukaan padat selain menyerap juga memancarkan panas. Jika dibandingkan dengan pancaran benda hitam, bagian yang dipancarkan oleh suatu permukaan disebut koefisien emisi e :

$$e = \frac{q^{(e)}}{q_b^{(e)}}; e_v = \frac{q_v^{(e)}}{q_{bv}^{(e)}} \dots \dots \dots (6.92)$$

Jika $q^{(e)}$ = energi yang dipancarkan benda biasa,

Q_b = energi yang dipancarkan benda hitam

Perpindahan panas secara radiasi untuk benda hitam dirumuskan dalam HUKUM STEFAN-BOLTZMANN sebagai berikut :

$$Q_b^{(e)} = \sigma T^4 \dots \dots \dots (6-93)$$

Dimana σ = tetapan Stefan-boltzman = $5,67.10^{-8}$ W/(m²)(°K). Untuk benda tak-hitam energi yang dipancarkan ialah :

$$Q^{(e)} = e \sigma T^4 \dots \dots \dots (6-94)$$

Hokum Stefan-Boltzman menyatakan energy total yang dipancarkan oleh suatu benda dari seluruh permukaannya ke semua arah. Untuk teknik yang penting ialah energi yang dipertukarkan antara dua benda atau dua permukaan. Karena sering sekalil tidak semua permukaan suatu benda menghadap kebenda yang lain, maka dari pancaran total benda pertama hanya sebagai sampai pada benda kedua.

Benda kedua menyerap sebagian dari energi yang sampai padanya dan bagian yang lain dipancarkan kembali kebenda pertama. Pancaran benda kedua itu sebagian diserap oleh benda pertama dan sebagian dipancarkan kembalim begitu seterusnya.

Pertukaran energi antara dua benda hitam dinyatakan oleh persamaan yang berikut:

$$Q_{12} = A_1 F_{12} \sigma (T_1^4 - T_2^4) = A_2 F_{21} \sigma (T_1^4 - T_2^4) \dots \dots \dots (6-95)$$

Keterangan :

Q_{12} = energi yang dipertukarkan antara benda hitam 1 dan 2

A_1 = luas permukaan total benda 1

A_2 = luas permukaan total benda 2

F_{12} = bagian dari radiasi A_1 yang sampai pada A_2

F_{12} = bagian dari radiasi A_2 yang sampai pada A_1 . F_{12} dan F_{21} disebut factor penglihatan (view factors)

$$A_1 F_{12} = A_2 F_{21}$$

Menghitung F sangat sukar. Untuk beberapa hubungan geometri dalam buku W.H.McAdams, Heat Transmission. McGraw-Hill.1954, terdapat nomogram-nomogram untuk F, jika nilai F diketahui, perhitungan pertukaran radiasi panas tidaklah sukar.

Untuk dua-benda tak hitam pertukaran radiasi panasnya dapat dihitung seperti dibawah ini. Perhitungan semacam ini hanya mungkin dilakukan untuk benda kecil yang CEMBUNG permukaannya (benda 1, temperature T_1). Yang seluruhnya dilindungi oleh permukaan lingkungan pada T_2 . laju energi yang dipancarkan oleh benda 1 :

$$Q_{12} = \epsilon_1 A_1 \sigma T_1^4$$

Laju energi yang diserap oleh permukaan 1 dari lingkungan

$$Q_{12} = a_1 A_1 \sigma T_2^4$$

Disini F_{12} diambil sama dengan 1, karena permukaan 1 itu tidak cembung dan diliputi oleh permukaan 2 sehingga seluruh pancarannya diterima oleh lingkungan dan tidak ada yang diterima kembali oleh 1.

Selisih energi yang dipertukarkan menjadi :

$$Q_{12} = \sigma A_1 (e_1 T_1^4 - a_1 T_2^4) \dots\dots\dots (6-96)$$

E_1 ialah nilai koefisien emisi permukaan 1 pada T_1 , a diperkirakan sama dengan nilai e untuk permukaan 1 pada T_2 .

a. contoh : kehilangan panas karena radiasi dan konveksi bebas.

SOAL

Sebuah pipa terpasang secara mendatar dalam sebuah ruangan. Pipa itu dari luar diinsulasi dengan asbes sampai diameter insulasi 15 cm. permukaan insulasi temperaturnya 37°C (310°K), sedang temperature udara dalam ruangan dinding ruangan adalah 27°C(300°K). perkirakan panas yang hilang karena radiasi dan konveksi bebas persatuan panjang pipa. Konveksi bebas pada pipa mendatar yang panjang mengikuti persamaan :

$$Nu = 0,525 (Gr.Pr)^{3/4} \dots\dots\dots (6-97)$$

PENYELESAIAN

Umpamakan, bahwa permukaan insulasi adalah permukaan “1” dan dinding ruangan adalah permukaan 2. Untuk system dari soal ini dapat dipakai persamaan (6-96) :

$$Q_{12} = \sigma A_1 (e T_1^4 - a T_2^4)$$

Keterangan yang dapat dikumpulkan ialah :

$$\sigma = 5,67 \cdot 10^{-8} \text{ W (m)}^{-2} (\text{°K})^{-1}$$

$$A_1 = \pi dL = \pi \cdot 0,15 \cdot 1 \text{ m}^2$$

$$E_1 = 0,93 \text{ untuk } 310^\circ\text{K}$$

$$A_1 = e_1 \text{ pada } 300^\circ\text{K} = 0,03$$

$$T_1 = 310^\circ\text{K}$$

$$T_2 = 300^\circ\text{K}$$

Jika nilai-nilai di atas dimasukkan dalam persamaan (6-96) diperoleh :

$$Q_r = q_{12} = 5,67 \cdot 10^{-8} \cdot \pi \cdot 0,15 \cdot (0,93 \cdot 310^4 - 0,93 \cdot 300^4) = 28 \text{ watt}$$

Untuk konveksi bebas dapat dikumpulkan keterangan udara (dinilai pada temperature lapisan udara sebesar 305°K) sebagai berikut :

$$\begin{aligned} \mu &= 17 \cdot 10^{-6} \quad \text{N.det ik m}^{-2} \\ \rho &= 1,20 \quad \text{kgm}^{-3} \\ \sigma_p \mu &= 1,03 \cdot 10^3 \quad \text{J (kg)}^{-1} (\text{° C})^{-1} \\ k &= 0,025 \quad \text{w(m)}^{-1} (\text{° C})^{-1} \\ \beta &= 1/T_f = \frac{1}{305} \quad \text{K}^{-1} \end{aligned}$$

Keterangan lain yang diperlukan ialah :

$$D = 0,15 \text{ m}$$

$$\Delta T = 10^\circ\text{K}$$

$$G = 9,81 \text{ m detik}^{-2}$$

Jika dimasukkan kedalam persamaan (6-97) didapat :

$$\begin{aligned} Nu &= \frac{hd}{k} = 0,525 \left(\frac{\rho^2 \beta g d^3 \Delta T}{\mu} \cdot \frac{\sigma_p \mu}{k} \right)^{1/2} \\ &= 0,525 \left(\frac{1,20^2 \cdot 9,81 \cdot 0,15^3 \cdot 10 \cdot 1,03 \cdot 10^3}{305 \cdot 17 \cdot 10^{-6}} \cdot \frac{0,025}{0,025} \right)^{1/2} \\ &= 0,525 (3,79 \cdot 10^6)^{1/2} \\ &= 23,2 \\ H &= \frac{k}{d} Nu = \frac{0,025}{0,15} \cdot 23,2 = 3,87 \text{ W(m)}^{-2} (\text{° K})^{-1} \end{aligned}$$

Hilangnya panas karena konveksi bebas per satuan panjang pipa ialah :

$$\begin{aligned} Q'_k &= h \cdot A \cdot \Delta T = h \cdot \pi d \Delta T \\ &= 3,87 \cdot \pi \cdot 0,15 \cdot 10 = 18 \text{ watt} \end{aligned}$$

Panas total yang hilang ialah :

$$Q' = q_r + q_k = 28 + 18 = 46 \text{ watt.}$$

Perhatikan, bahwa panas yang hilang karena radiasi lebih besar pada yang disebabkan konveksi bebas.

7. RINGKASAN DAN SOAL-SOAL

Konduksi panas tak mantap :

- lempeng setengah tak terhingga
- lempeng dengan tebal terhingga

konveksi panas :

Radiasi

- konveksi paksa

$$q_{12} = A F \epsilon (T_1^4 - T_2^4)$$

- konveksi bebas

$$q_{12} = \sigma A_1 (e T_1^4 - a T_2^4)$$

- koefisien pindah panas

$$Q = h(T_P - T_F)$$

SOAL-SOAL :

1. dua buah lempeng dari bahan a dan b, masing-masing mempunyai temperature merata T_a dan T_b . kedua lempeng itu dihubungkan secara erat satu dengan yang lain. Buktikan, bahwa pada saat itu juga terjadi temperature kontak T_C pada permukaan itu, yang mengikuti persamaan :

$$\frac{T_a - T_C}{T_C - T_b} = \sqrt{\frac{(k\rho C_p)_b}{(k\rho C_p)_a}}$$

2. dari persamaan (6.61) turunkan persamaan untuk besarnya fluksi panas pada permukaan sebuah lempeng setengah tak terhingga pada waktu tertentu.

Jawab :

$$q_{y,y=0} = \frac{k}{\sqrt{\pi \alpha t}} (T_1 - T_o)$$

3. melalui pipa datar yang tidak diinsulasi mengalir air dari 50°C. udara sekitar pipa temperturnya 20°C. tahanan panas melalui dinding pipa diabaikan. Panas yang hilang karena konveksi bebas besarnya 100 W. kemudian dialirkan air dengan temperature 80°C. berapa besarkah panas yang hilang sekarang

untuk soal ini berlaku $Nu = 0,17 (Gr.Pr)^{1/3}$. untuk menghitung Gr, gunakan $\beta = 1/T_f$;

$T_f = \frac{1}{2}(T_{PIPA} + T_{UDARA})$. Semua sifat fisis dinilai pada T_f .

Jawab: 0,22 KW

4. pipa yang tidak diinsulasi, panjang 2 m dan diameter 10 cm, berada dalam udara dingin. Didalam pipa ada uap yang mengembun. Untuk konveksi panas ini berlaku $Nu = 0,55$

$(Gr.Pr)^{3/4}$ untuk $10^3 < Gr.Pr < 10^8$. jika $\frac{g \cdot \Delta \rho}{\alpha \mu} = 3 \cdot 10^6$, hitunglah perbandingan laju

pengembunan bila pipa dipasang mendatar dan tegak lurus.

Jawab : datar : tegak lurus = 2,1 : 1

5. a. sebuah alat penukar panas terdiri dari dua pipa konsentris, keduanya sepanjang 2 m. pipa yang dalam berdiameter-dalam 25 mm dan dilewati air dengan $Re = 1500$, yang pada waktu masuk mempunyai temperature rata-rata $20^{\circ}C$. di luar pipa ini mengembun uap air sedemikian hingga temperature permukaan-luar pipa merata $100^{\circ}C$. abaikan tahanan panas dingin pipa. Hitunglah temperature air waktu keluar.

Jawab : $39,8^{\circ}C$

6. Peluru timbale dibuat dengan meneteskan timbale ($\rho = 11.340 \text{ kg m}^{-3}$) melalui udara. Jika temperature udara $20^{\circ}C$, berapa tinggi timbale itu harus dijatuhkan supaya tetes yang berdiameter 2 mm tepat menjadi padat seluruhnya pada waktu sampai dibawah ? segera setelah dilepaskan tetes-tetes itu mencapai kecepatan akhir yang tetap. Konduktivitas panas untuk timbale begitu tinggi sehingga temperature tetes itu merata dan sama dengan titik leleh timbale ($=327^{\circ}C$). panas peluru timbale $23,5.10^3 \text{ J kg}^{-1}$.

$$\frac{hd}{k} = 2,0 + 1,8 \left(\frac{\mu Cp}{k} \right)^{0,15} + 0,66 \left(\frac{\rho vd}{\mu} \right)^{0,50} \left(\frac{\mu Cp}{k} \right)^{0,33} \quad \text{untuk } 1 < Re < 10^4$$

Jawab : 14,8 m

7. Suatu cairan dalam sebuah bejana berbentuk silinder mendatar ($d=1\text{m}$, $L = 3\text{m}$) yang diberi insulasi pada atasnya, diaduk dengan daya 4 kW. Dari bawah tegak lurus pada poros bejana dihembuskan udara dengan kecepatan 9 m det^{-1} . bejana terisi penuh dengan air jika pada waktu $t = 0$, $T = T_o = T_{\text{udara}}$. Bagaimanakah perubahan temperature air dengan waktu. Gunakan persamaan berikut :

$$\frac{hd}{k} = 0,42 \left(\frac{\mu Cp}{k} \right)^{0,20} + 0,57 \left(\frac{\rho vd}{\mu} \right)^{0,50} \left(\frac{\mu Cp}{k} \right)^{0,33} \quad \text{untuk } 1 < Re < 10^4.$$

Jawab : $T - T_o = 41,8 (1 - \exp (-9,7 \times 10^{-6}t))$

8. sebuah batang yang panjang (diameter 11mm, koefisien embisi 0,8, tempertur permukaan $327^{\circ}C$) berada secara mendatar dalam udara yang tenang (temperature $27^{\circ}C$). hitunglah berapa bagian dari laju pindah panas disebabkan oeh konveksi bebas dan berapa bagian oleh radiasi.

Jawab : konveksi bebas 47%, radiasi 53%

9. Jika antara dua lempeng, yang lebar dengan koefisien emisi yang sama, diletakkan lempeng ketiga, maka laju pindah panas karena radiasi menjadi serapuh dari semula. Buktikan

10. sifat benda hitam dapat didekati denagn membuat lubang kecil dalam suatu rongga dengan permukaan yang kasar. Koefisien emisi lubang itu sendiri dapat ditentukan dengan rumus yang berikut :

$$e_{\text{lub ang}} = \frac{e}{e + f(1 - e)}$$

Jika e = koefisien emisi permukaan rongga

F = perbandingan luas lubang terhadap luas seluruh rongga.

Sebuah bola tipis berongga terbuat dari tembaga yang permukaannya sebelah dalam telah dioksidasi. Diameter bola 15cm. hitunglah berapa besar lubang yang harus dibuat pada permukaan bola itu untuk mencapai koefisien absorpsi sebesar 0,999. $\epsilon = 0,57$ untuk tembaga yang dioksidasi.

Jawab : jari-jari lubang 5,5 mm

A. Evaluasi

1. Jelaskan pengertian Peristiwa perpindahan Panas
2. Sebutkan jenis-jenis perpindahan panas
3. Jelaskan bagaimana peristiwa perpindahan Panas pada suatu system dapat terjadi.
4. Buatlah contoh peristiwa perpindahan panas secara konduksi, konveksi, dan radiasi

B. Buku Sumber, Bacaan Pendukung

Douglas, J.M., 1988, "conceptual Design of Chemical Processes"

H.S. Carslaw & J.C. Jaeger, 1959, "Conduction of Heat in solids", Oxford University Press

R.B. Bird, W.E. Stewart & E.N. Lightfoot, 1965, "Transport Phenomena, Jhon Wiley".

Rudd, D.F., and Watson, C.C., 1968,"Strategy of Process Engineering', John Wiley and Sons, Inc., New York

Tjipto Utomo, 1981," Pengantar Peristiwa Perpindahan", Proyek kerjasama JTA-9A Departemen Teknologi Kimia, ITB- Universitas Teknologi Twente di Naderland

Townsend, D.W., and Linnhoff, B., 1982, "Designing Total Energy System by Systematic Methode", Chem. Eng. No.378, London

W.J. Beek & K.M.K. Muttzall, Transport Phenomena, Jhon Wiley, 1975.

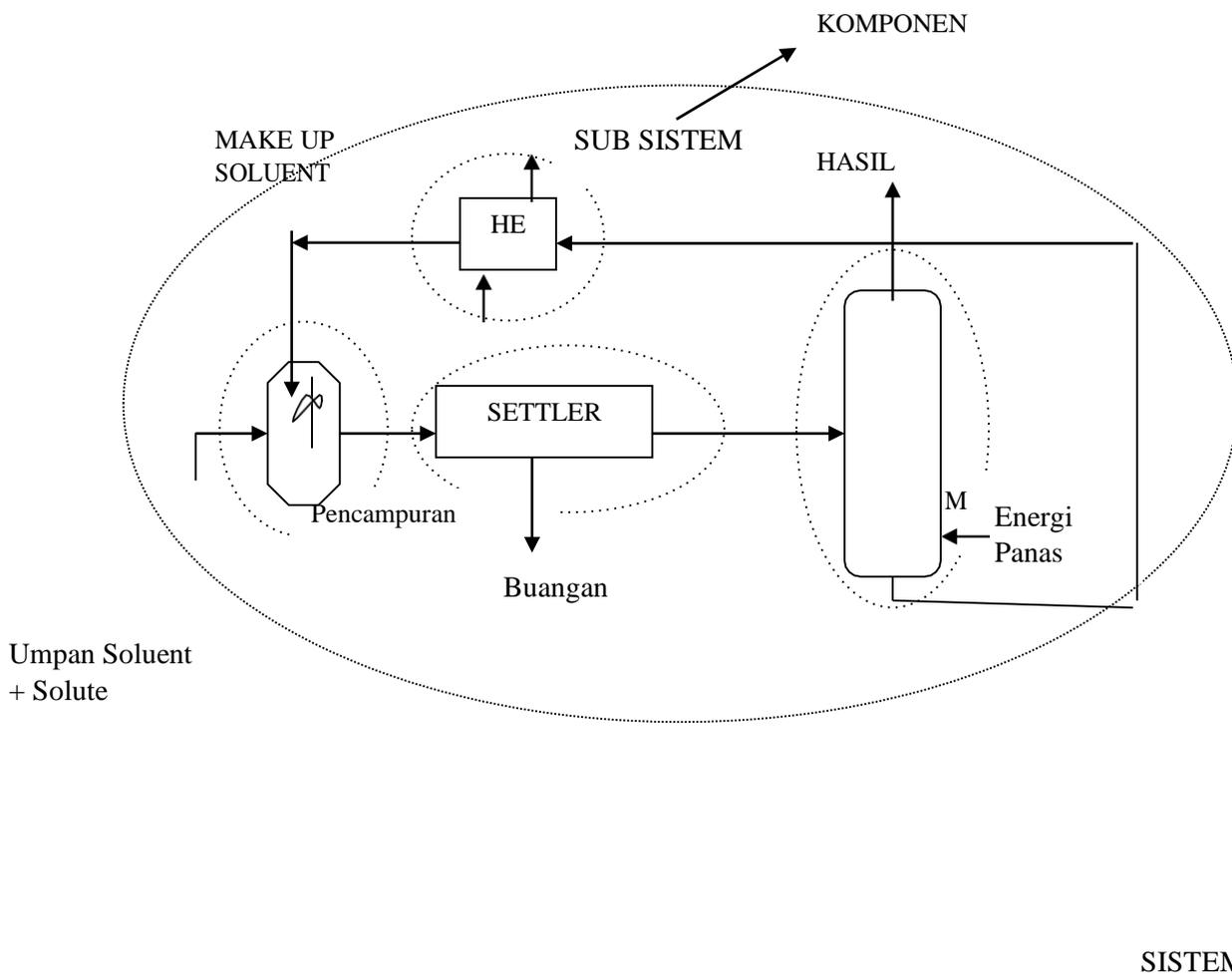
W.H. McAdams, Heat Transmission, McGram-Hill, 1954

BAB 7

OPTIMASI

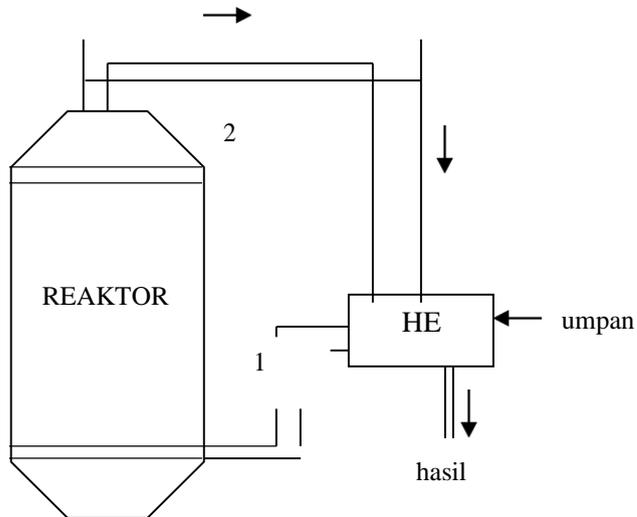
Dalam bab ini akan dipelajari tentang proses optimasi, yaitu Suatu proses mencari kondisi (operasi) yang memberikan harga atau nilai maksimum dari suatu fungsi

Bentuk Sistem dan Sub Sistem dapat digambarkan seperti gambar 7.1 dibawah ini:

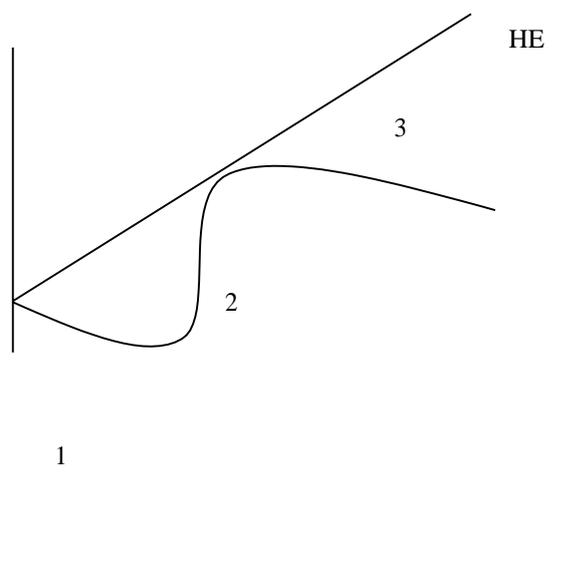


Gambar 7.1. Sistem dan Sub Sistem

Contoh umum optimasi pada suatu sistem dapat dilihat pada gambar 7.2 dan gambar 7.3



Gambar 7.2. Performance dari system yang terdiri atas HE Reaktor



Gambar 7.3. Sistem dengan tiga kondisi Operasi

Artinya untuk system ini ada tiga kondisi operasi yang mungkin

(T_2 reaktor = T_2 HE dan T_1 reaktor = T_1)

Titik (1) dan (3) → titik operasi yang stabil

Titik (2) → titik operasi tidak stabil

Untuk menggambarkan pengaruh interaksi didalam suatu system, dipertimbangkan 2 unit proses, yaitu sebuah reaktor katalitik dan HE. Reaktor dan HE bekerja secara normal jika mereka bekerja secara terpisah kemudian HE digabungkan dengan reaktor untuk memanfaatkan panas yang dibawah hasil untuk memanaskan umpan masuk reaktor. Suhu arus meninggalkan reaktor harus sama dengan suhu masuk HE karena variable ini sekarang satu dan sama suhu arus keluar HE harus sama dengan suhu masuk reaktor. Jika performance dari kedua subsistem itu digambarkan dalam sebuah grafik, menunjukkan bahwa ada tiga titik yang memenuhi keadaan diatas. Titik (1) dan (3) merupakan keadaan “stabil” sedangkan titik (2) merupakan keadaan operasi yang kalau misalnya terjadi gangguan-gangguan, maka system akan menuju titik (1) atau (3) tergantung pada perubahan yang terjadi misalnya perubahan terletak diatas titik (2) maka keadaan operasi stabil akan menuju ketitik (3). Jika perubahan terletak dibawah titik (2) maka keadaan operasi stabil akan menuju titik (1).

1. Jenis-Jenis Sistem

Dalam perancangan system dibedakan menjadi:

1. workable system (system yang dapat bekerja melakukan tugas dalam batas-batas tertentu)
 2. optimum system (system yang bekerja pada kondisi optimum)
- Workable system adalah suatu system yang :
 1. memenuhi syarat-syarat untuk apa system itu dirancang
contoh :
 - dapat membangkitkan listrik dengan kapasitas tertentu
 - dapat memanaskan fluida dengan suhu tertentu
 - dapat menghasilkan produk dengan kapasitas tertentu
 2. mempunyai umur dan biaya perawatan yang besar
 3. mengikuti semua batasan-batasan yang ada seperti ukuran, suhu, tekanan, polusi dan lain-lain
 - Optimum system
System yang bekerja pada kondisi optimum berdasarkan criteria tertentu criteria ini pada umumnya :
 - biaya operasi
 - ukuran alat
 - berat alat

- Workable vs Optimum system

Berikut digambarkan perbedaan antara perancangan suatu work able system dengan optimum system. Anggap kita akan memilih pompa dan pemipaan untuk menyangkut 3kg/detik suatu fluida dari suatu tempat ke tempat lain yang berjarak 250 m dan berada 8 m lebih tinggi daripada tempat asalnya. Jika perancangan dibatasi hanya sekedar untuk mencapai sebuah workable system, maka diikuti prosedur sebagai berikut :

1. elevansi/beda tinggi 8m menyebabkan adanya perbedaan tekanan

$$\begin{aligned} pgh &= 1000 \text{ kg/m}^3 \cdot 9,8760 \text{ m/s}^2 \cdot 8 \text{ m} \\ &= 78,5 \text{ KPa} \end{aligned}$$

Ambilah tambahan 100 KPa untuk melawan fraksi pipa dengan panjang 250 m.

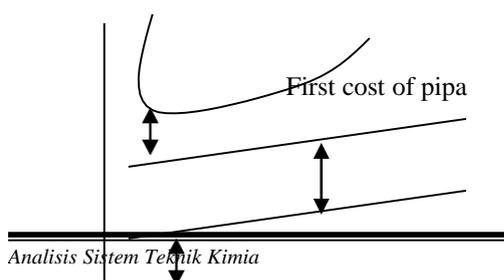
2. kemudian pilih sebuah pompa dengan kapasitas 3kg/detik dan melawan beda tekanan 178,5 KPa akhirnya, pilih satu ukuran pipa dari literature sehingga pressure drop dalam panjang 250 m adalah 100 KPa. Ternyata pipa dengan $10 = 50 \text{ mm}$ memenuhi persyaratan.

Apabila system tersebut dirancang untuk mencapai "optimum system" maka harus ditentukan criteria-kriteria untuk mengoptimasi criteria yang sering dipilih adalah cost, misalnya :

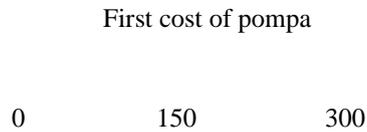
- first cost saja → untuk proyek spekulatif
- lifetime cost, yang terdiri atas :
 1. First cost
 2. Biaya pemompaan
 3. Biaya perawatan

Pada perancangan pompa yang optimum dan system pemompaan untuk mencapai lifetime cost yang minimum kenaikan tekanan yang ditimbulkan oleh pompa tidak ditetapkan terlebih dahulu dibiarkan saja. Jika yang menentukan biaya adalah 3 komponen berikut :

1. First cost dari pompa
2. First cost dari pipa
3. Life time pumping cost (biaya pemompaan selama operasi) maka biaya-biaya diatas merupakan fungsi dari tekanan pompa dan dapat digambarkan seperti gambar 7.4



Life time of pumping cost



Gambar 7.4. Life time pumping cost

Bila tekanan pompa naik, maka harga pompa naik untuk flow 3kg/s yang diperlukan karena diperlukan kecepatan putaran yang lebih tinggi dan atau ukuran diameter impeller yang lebih besar. Dengan naiknya tekanan maka, power yang diperlukan pompa juga lebih besar. Karenanya lifetime pumping costnya naik. Harga pipa menjadi sangat tinggi, bila tekanan untuk mengatasi friksi didalam pipa mendekati nol. Tekanan didalam pipa (pressure drop) adalah tekanan pompa dikurangi 78,5 KPa yang diperlukan untuk membedakan elevasi. Teknik optimasi yang tepat dapat digunakan untuk menentukan tekanan pompa optimal. Yang mana pada gambar diatas kira-kira 150 KPa. Akhirnya dipilih pompa untuk menaikkan tekanan 150 KPa dan ukuran pipa dapat dipilih sehingga pressure drop karena friksi adalah 71,5 KPa atau kurang.

3. Kondisi Optimum

Sekarang pembahasan dibatasi pada system-sistem atau subsistem dengan satu buah derajat kebebasan atau dengan derajat kebebasan hanya sedikit. Suatu strategi yang tepat untuk mencari level operasi terbaik seringkali menurunkan serentetan “well planed numerical experiments”, suatu pendekatan yang disebut DIRECT SEARCH. Teknik direct search merupakan alat dasar dari teori optimasi dan penting dalam strate optimasi untuk system-sistem besar.

Contoh 1

Sebuah usulan system reactor separator mempunyai sebuah derajat kebebasan utama, yaitu konversi didalam reactor apabila dipilih sebuah reaktor yang murah dan sederhana dengan konversi rendah maka diperlukan pemisah hasil yang baik dan mahal, dengan konversi tinggi akan mengurangi beban pemisah sehingga mengurangi biayanya. Bagaimana dapat mengatur konversi dengan usaha maksimum sehingga meminimumkan biaya dari total system ?

Penyelesaian

Metode klasik dari optimasi adalah berdasarkan pada kalkulus khususnya menentukan nilai optimum suatu fungsi yang ditunjukkan oleh sifat sifat dan turunan. Dalam hal mengoptimasi dengan kalkulus, fungsinya harus sapat diturunkan dan batasan-batasannya harus merupakan “Equality Constrains” (merupakan persamaan) apabila turunan kedua dari fungsi berharga positif, maka ekstrimnya adalah minimum, sebaliknya bila negative, maka ekstrimnya maksimum.

$$\begin{aligned} \text{minimum} &= \frac{dy}{dx} = 0 \rightarrow \frac{d^2 y}{dx^2} > 0 \\ \text{maksimum} &= \frac{dy}{dx} = 0 \rightarrow \frac{d^2 y}{dx^2} < 0 \end{aligned}$$

Contoh 2

Untuk merancang sebuah tangki penyimpanan berbentuk silinder dengan volum v , dimana biaya dinding tangki \$ c_s/ft^2 , biaya atau harga bagian atas (tutup) \$ (C_T/ft^2) dan biaya atau harga alas \$ (C_B/ft^2) → dapat dilakukan sebagai berikut : (S = side, T =top, B =bottom)

$$\text{Biaya total : } C_{\text{tot}} = C_s \pi D H + (C_T + C_B) \frac{\pi}{4} D^2$$

$$\text{Sedangkan : } V = \frac{\pi}{4} D^2 H ; H = \frac{4V}{\pi D^2}$$

Dengan D = Diameter

H = tinggi

Substitusikan H pada biaya total

$$C_{\text{tot}} = C_s 4 \frac{V}{D} + (C_T + C_B) \frac{\pi}{4} D^2$$

Diferensialkan terhadap D dimana D variable perancangan

$$\frac{dC_{\text{tot}}}{dD} = -\frac{4C_s V}{D^2} + (C_T + C_B) \frac{\pi}{2} D = 0$$

$$D^3 = \left(\frac{C_s}{C_T + C_B} \right) \frac{8V}{\pi}$$

$$\frac{d^2 C_{\text{tot}}}{dD^2} > 0 \rightarrow \text{maka } D \text{ adalah minimum}$$

Substitusikan untuk volume dalam D dan H memberikan hubungan perbandingan diameter terhadap tinggi dengan biaya minimum :

$$\frac{D}{H} = \frac{2C_s}{C_T + C_B} \quad (7-1)$$

Jadi jika harga-harga dinding, tutup dan alas adalah sama, $C_s = C_T = C_B$, maka

tutup, dinding dan alas mempunyai harga sama, $C_s = C_B$; $C_T = 0$

$$\frac{D}{H} = 2$$

Bila dilakukan fondasi yang baik atau harga tanah mahal dan $C_s = C_T$, tapi

$$C_B = 2C_T$$

$$\frac{D}{H} = \frac{2}{3}$$

$$\frac{D}{H} = 1 \text{ bila tidak ada}$$

Tampak bahwa persamaan (7-1) menerangkan variasi bentuk tangki penyimpan yang umum terdapat dipabrik-pabrik kimia.

- **Perlunya Metode Penyelesaian**

Metode klasik untuk menemukan keadaan ekstrim dari suatu fungsi dengan menggunakan kalkulus adalah terbatas dalam kebanyakan masalah-masalah perancangan karena penggunaan kalkulus dalam praktek terbatas untuk fungsi-fungsi yang mudah dimanipulasi, fungsi-fungsi dan perancangan proses menjadi tidak seperti di buku-buku matematika, tetapi sering tersusun dalam bentuk table, diskontinyu, atau mempunyai karakteristik lain yang memungkinkan pemakaian kalkulus.

Metode klasik yang agak efisien diganti menjadi search methode

Bila untuk memperoleh keadaan optimum dalam problem dengan sebuah variable perancangan atau dengan variable perancangan yang jumlahnya sedikit.

4. Permasalahan Optimasi

Dua masalah optimasi :

1. mengoptimasi proses. Pada kondisi ini akhirnya dapat ditemukan kondisi-kondisi optimum dengan skema yang layak tapi perlu dipikirkan metode optimasi mana yang dapat membuat pemanfaatan waktu paling efisien dari engineer.
2. mengoptimasi metode untuk mengoptimasi proses. ini merupakan pertanyaan kritis dalam proses engineering karena perancang paling sederhana dapat dengan mudah mengurangi jumlah perhitungan

Ada 2 alasan mengapa dipertimbangkan system dengan jumlah derajat kebebasan hanya sedikit :

1. proses-proses penting dalam industri hanya mempunyai sedikit variable perancangan.
2. Proses system yang besar disusun oleh sejumlah unit proses yang lebih kecil dan metode untuk optimasi system besar sering dilakukan dengan memecah system menjadi komponen-komponen yang lebih kecil yang kemudian optimasi dapat dilakukan dengan search methode.

- **Metode Penyelesaian Variabel**

Perancangan tunggal

Nilai optimum dari variable perancangan tunggal sering dapat ditentukan dengan cepat dengan menggunakan konsep yang disebut "region elimination"

Dalam praktek, harga kisaran suatu variable dapat ditentukan selalu ada batasannya. Contoh :

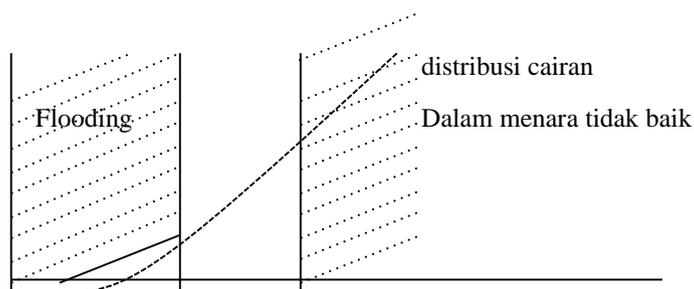
- luas transfer panas pada HE tidak mungkin < 0 dan tidak bias terlalu besar
- fraksi berat antara 0 dan 1
- tekanan pada batas keamanan
- konversi antara 0 dan 100%
- dll

contoh kasus :

Menentukan diameter absorber dari dasar menara mengalir gas dan laju aliran massa sudah ditentukan. Komponen gas yang dapat larut akan diambil dengan adsorpsi pada cairan yang dialirkan dari puncak menara. Dengan memperbesar diameter menara akibatnya memperlambat kecepatan linier gas dalam menara (menembus bahan isian). Menurunkan pressure drop sehingga menurunkan biaya pemompaan tetapi diameter menara > biaya pembuatan >. Untuk menurunkan biaya operasi maka harus dicapai keadaan yang tepat (seimbang) antara biaya pemompaan dan biaya pembuatan.

Batasan-batasan dalam penentuan diameter menara berikutnya

- diameter terlalu kecil → flooding, cairan terbawa aliran gas sehingga menara tidak dapat dioperasikan.
- Diameter terlalu besar → timbul masalah distribusi cairan dalam menara.

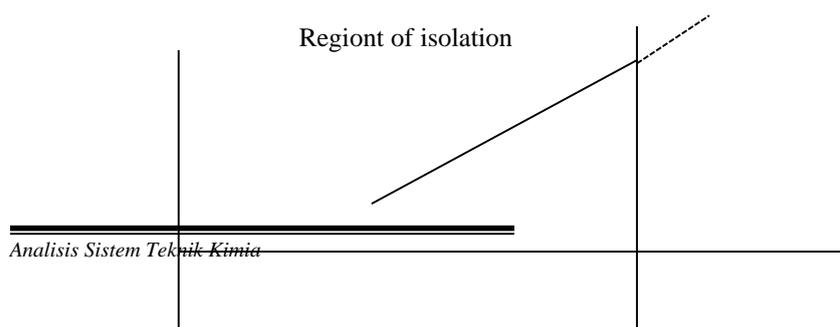


Gambar 7.5 batasan-batasan dalam penentu diameter pada menara

Berdasarkan pertimbangan biaya maka pilih diameter terkecil yang tidak terjadi flooding

Dalam praktek lapangan dianjurkan diameter menara yang sedikit lebih besar dari pada diameter terkecil.

Jika objective merupakan fungsi linier dari uap perancangan, maka kondisi optimumnya harus selalu terletak pada batasan (constant) seperti pada gambar berikut :



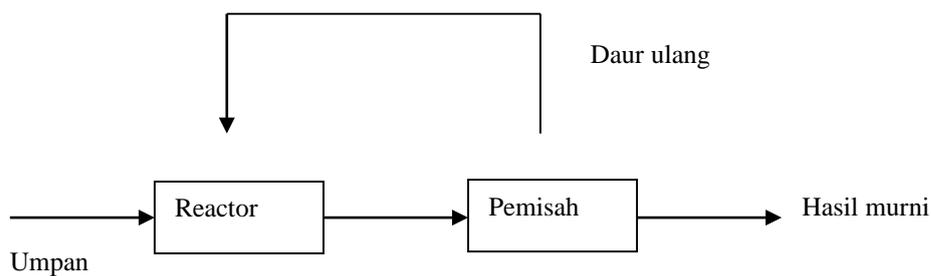


Variable perancangan

$$\alpha (X)$$

Gambar 7.6. kondisi optimum pada batasan (constant) Fungsi linier

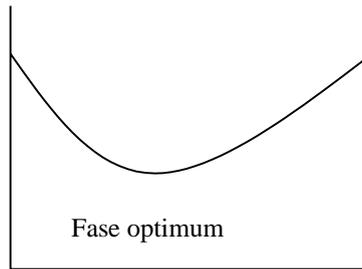
Untuk fungsi yang tidak linier, kondisi optimasi dapat juga terletak pada batasan sehingga pertama kali harus diteliti kondisi pada batasan-batasan tersebut. Contoh sebagai berikut :



Gambar 7.7. Fungsi tidak linier

Variable perancangan yang akan diatur adalah derajat kesempurnaan reaksi. Jika reaksi berjalan sempurna sehingga tidak perlu pemisah sehingga tidak ada biaya konstruksi untuk pemisah. Tapi bila dalam arus keluar reactor masih ada umpan yang tidak bereaksi sehingga perlu pemisah akibatnya ada biaya konstruksi untuk pemisah.

Hal ini menyebabkan biaya total dari system menjadi diskontinyu dan menyebabkan kondisi optimum yang dipilih sebagai perancangan optimum menjadi salah bila kondisi batas tidak diperiksa secara terpisah



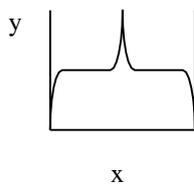
Derajat kesempurnaan reaksi

Gambar 7.8. Kondisi batas

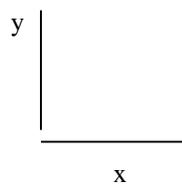
Fungsi tujuan dalam kebanyakan masalah teknik bersifat unimodal fungsi unimodal sehingga fungsi yang hanya mempunyai satu keadaan optimum (maksimum atau minimum)

Fungsi dengan > 1 keadaan optimum \rightarrow fungsi nonunimodal

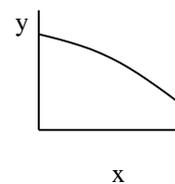
Contoh :



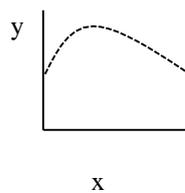
Unimodal kontinyu



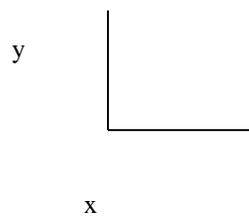
unimodal diskontinyu



unimodal dengan batasan



unimodal diskrit



non unimodal

• SOAL

Untuk memenuhi luas transfer panas yang dibutuhkan, pipa-pipa dengan panjang 100 m harus dipasang pada sebuah shell and tube HE. Total biaya HE tersebut dalam dolar meliputi :

1. harga pipa-pipa \$ 900

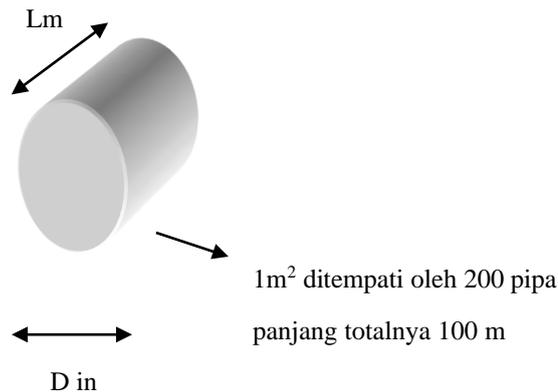
2. harga shell $1100 D^{2.5} L$

3. harga rantai yang ditempati oleh HE 320 DL dengan $L =$ panjang He, m

$D =$ diameter shell, m

Jarak antara pipa-pipa dalam shell dibuat sedemikian rupa sehingga 200 pipa menempati luas 1 m^2 pada shell. Tentukan diameter dan panjang HE sehingga total biaya tersebut menjadi minimum.

Penyelesaian



Gambar 7.9 Gambar Heat Exchanger

• fungsi tujuan :

$$\text{biaya} = 900 + 1100 D^{2.5} L + 320 DL$$

→ buat $L = f(D)$ atau sebaliknya

• batasan :

batasan yang ada adalah total panjang pipa 100m dan setiap $1m^2$ shell ditempati oleh 200 pipa

$$\left(\frac{\pi D^2 m^2}{4} \right) (Lm) \left(\frac{200 \text{ pipa}}{m^2} \right) = 100m$$

$$50\pi D^2 L = 100$$

$$L = \frac{2}{\pi D^2} \rightarrow \text{distribusikan ke fungsi}$$

Diperoleh :

$$\text{Biaya} : 900 + 1100 D^{2.5} \frac{2}{\pi D^2} + 320 D \frac{2}{\pi D^2}$$

$$: 900 + \frac{2200}{\pi} D^{0.5} + \frac{640}{\pi D}$$

→ fungsi tujuan hanya merupakan fungsi dari diameter saja

$$\frac{d(\text{biaya})}{dD} = \frac{1100}{\pi D^{0.5}} - \frac{640}{\pi D^2} = 0$$

$$D^2 = 0,7 \text{ m (D optimum)}$$

$$L^* = \frac{2}{\pi D^2} = \frac{2}{\pi (0,7)^2} = 1,3m$$

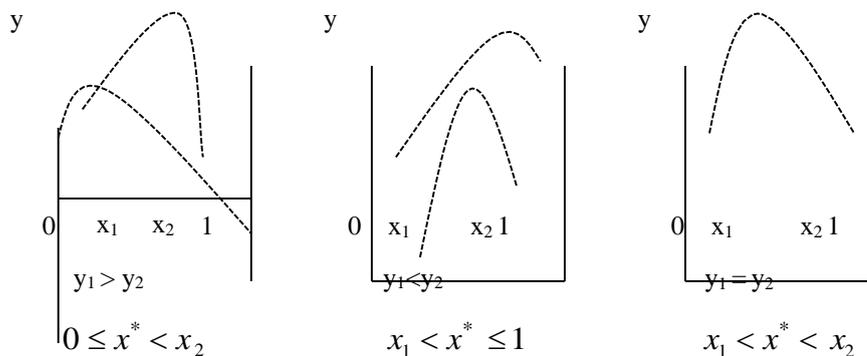
$D^* = L^* \rightarrow$ diameter dan panjang optimum

$$\begin{aligned} \text{Biaya minimum} &= 900 + 1100 (0,7)^{35} (1,30 - 320(0,7)(1,3)) \\ &= \$ 1777,45 \end{aligned}$$

Pada umumnya kita tahu interval mula-mula 8000 independent variable yang akan ditelusuri kondisi optimumnya maka untuk fungsi laba dan minimum untuk fungsi biaya interval ini disebut interval ketidak tentuan mula-mula sehingga perlu suatu prosedur yang sistematis untuk mencari ukuran interval tersebut.

Dilakukan dengan eksperimen dan menghapus bagian dari interval mula-mula yang tidak mengandung kondisi optimum.

Penghilangan bagian dari interval ketidaktentuan mula-mula dilukiskan pada gambar 7.10 untuk 3 hasil yang mungkin terjadi dari 2 titik yang dicoba pada interval $0 \leq x \leq 1$



Gambar 7.10 Interval ketidaktentuan pada kondisi optimum

$X^A = x$ yang memberikan harga optimum pada y

- $y_1 > y_2 \rightarrow$ harga maksimum bias terletak antara 0 dan x_1 atau x_1 dan x_2
 harga maksimum tidak mungkin terletak antara x_2 dan x_1
 \rightarrow bagian ini bias dihilangkan
- $y_1 < y_2 \rightarrow$ bagian interval 0 sampai x_1 bisa dihilangkan
- $y_1 = y_2 \rightarrow$ harga maksimum harus antara x_1 dan x_2
 interval 0- x_1 dan x_2 -1 bisa dihilangkan

jika harga-harga x_1 dan x_2 ditentukan \rightarrow cara ini disebut-sebut two-experience interval ketidaktentuan dikurangi sebanyak-banyaknya dengan jumlah ttt dari eksperimen

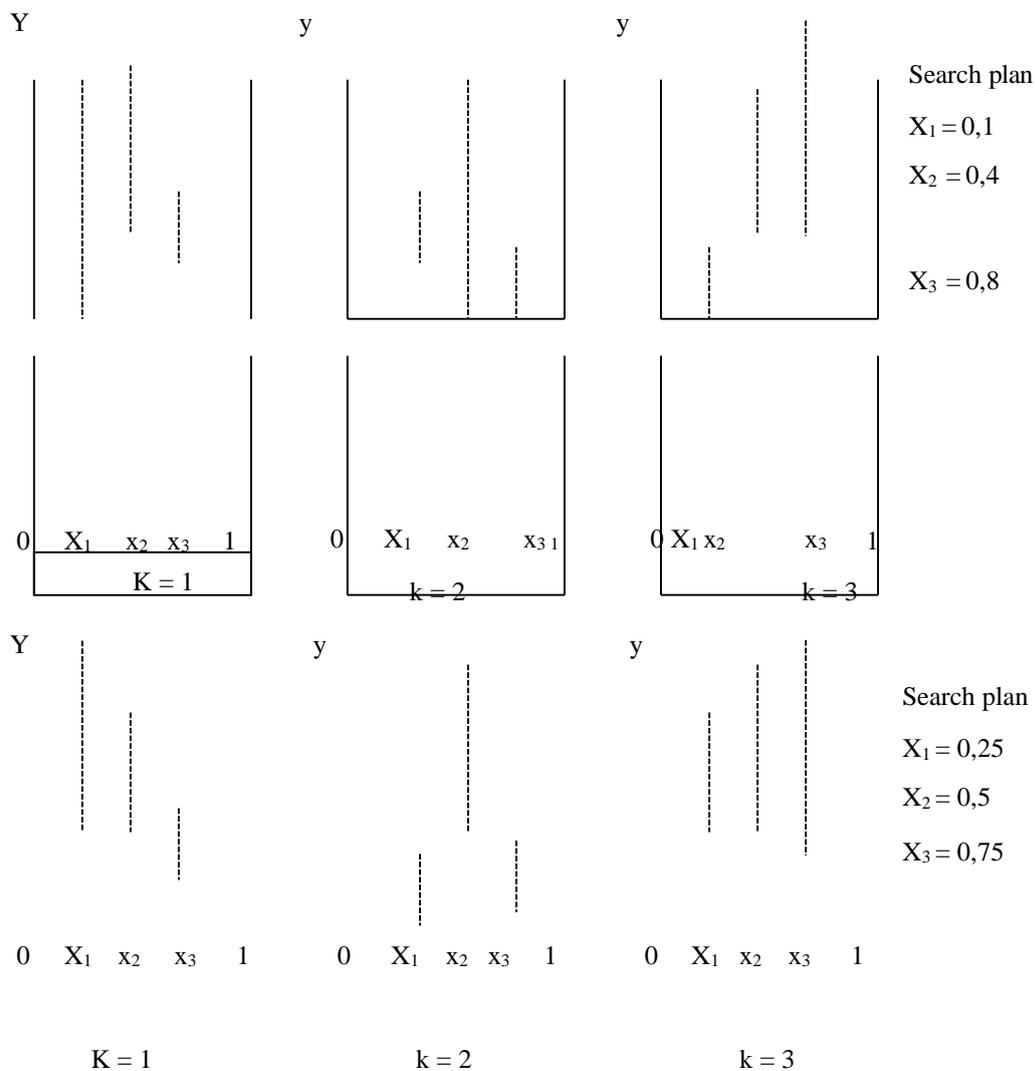
\rightarrow diperlukan ukuran keefektifan dari search plan sehingga dapat dipilih search plan terbaik sehingga dapat dipilih search plan terbaik (optimal untuk mengoptimasi fungsi)

o Pengukuran Keefektifan penyelesaian

\rightarrow keefektifan search harus tidak tergantung dari fungsi yang dioptimasi

\rightarrow maka diperlukan pengukuran keefektifan search plan, berdasarkan penempatan dari eksperimen-eksperimen tapi tidak berdasar pada hasil eksperimen-eksperimen tersebut karena itu criteria yang akan digunakan dalam perbandingan search plan adalah ukuran terbesar dari interval ketidaktentuan yang mungkin dari penentuan letak eksperimen – eksperimen. Hal ini tidak tergantung pada hasil eksperimen.

Bandungkan dua buah search plan yang ditunjukkan pada gambar 7.11 dibawah ini untuk keefektifannya berdasarkan pada interval ketidaktentuan terbesar dengan penempatan eksperimen ttt.



Gambar 7.11. keefektifannya dua buah search plant pada interval ketidak-tentuan terbesar dengan penempatan eksperimen

Search Plan I

→ 3 buah eksponen ditempatkan pada $x_1 = 0,1$; $x_2 = 0,4$; $x_3 = 0,4$ pada unit interval mula-mula. Hasil-hasil yang memungkinkan dari fungsi pada harga-harga tersebut ditunjukkan pada gambar diatas.

Search Plan II

→ hasil eksperimen ditempatkan pada $x_1 = 0,25$; $x_2 = 0,5$; $x_3 = 0,75$ pada unit interval mula-mula yang sama dengan search plan I dan hasil evaluasi fungsi yang mungkin untuk x_1, x_2, x_3

Untuk search plan pertama, lokasi dari interval ketidak pastian aktif (I_3) tergantung pada hasil eksperimen. Ambillah K adalah indeks hasil terbaik dari ketiga hasil maka :

Jika $K = 1$ maka $0 < x^* < x_1$ $i_3 = 0,4$ (paling mujur)

Jika $K = 2$ maka $x_1 < x^* < x_2$ $i_3 = 0,7$ (paling tidak mujur)

Jika $K = 3$ maka $x_2 < x^* < 1$ $i_3 = 0,6$ (menengah)

↳ Panjang interval yang membuat x^*

Jika x_1 ($K = 1$) punya nilai terbesar dari $x(x)$, maka interval ketidak-tentuan hasil akhir dari 3 eksperimen adalah $i_3 = 0,4$. hal ini merupakan hasil yang mujur bila dibandingkan dengan nilai terbesar dan $y(t)$ pada x_2 ($k=2$) dimana interval akhir adalah $i_3 = 0,7$. hasil menengah diperoleh untuk $k=3$ dimana $i_3 = 0,6$ hasil-hasil ini dapat ditulis sebagai :

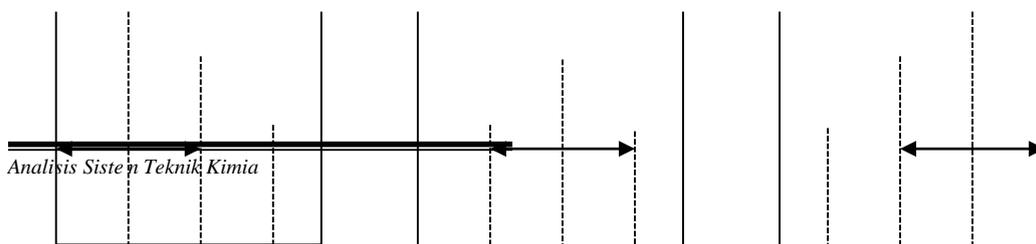
$$I_3 = (0,4,0,7,0,6) \text{ untuk } 1 \leq k \leq 3 \tag{4-1}$$

Untuk search plan kedua, tiga buah titik ditempatkan pada interval dengan jarak yang sama yaitu 0,25. maka dari itu $i_3 = 0,5$ tanpa memperhatikan lokasi harga $y(x)$ terbesar, apakah pad x_1 ($k=1$), x_2 ($k=2$), dan x_3 ($k=3$), hal ini dapat ditulis sebagai berikut :

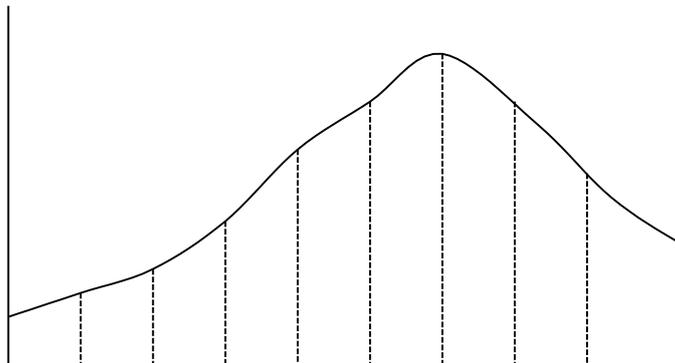
$$I_3 = (0,5,0,5,0,5) \text{ untuk } 1 \leq k \leq 3 \tag{4-2}$$

Apabila 2 search plan tersebut dibandingkan berdasar pada interval ketidak-tentuan akhir terbesar yang mungkin, pemilihan akan menghilangkan kemujuran dan tidak tergantung pada hasil eksponen untuk sebuah fungsi khusus.

Gambar 7.12 adalah keefektifan berdasarkan interval ketidak-teraturan akhir untuk 2 plan



Pada persamaan diatas x_{k-1} dan x_{k+1} adalah 2 eksperimen (titik) yang berdekatan dengan titik x_k , bila titik x_k ini merupakan titik yang mempunyai nilai $y(x)$ terbesar. Misal :



0 x_1 x_2 x_3 x_4 x_5 x_{n-2} x_{n-1} x_n I_0

Gambar 7.13. Gambaran interval pada beberapa titik eksperimen

Hasil dari eksperimen-eksperimen menentukan harga dari hasil (dari indeks k) terbaik $y(x_k)$ dan lokasi serta ukuran dari interval ketidaktentuan akhir, yaitu Y_n spesifik yang mengandung hasil x_k terbaik walaupun demikian perlu dibandingkan search-search plan, x_n , berdasarkan pada interval ketidaktentuan akhir terbesar, I_n yang tidak tergantung pada hasil eksperimen-eksperimen. Hal ini dapat ditulis sebagai berikut :

$$L_n(x_0) = \max | \ln(x_{nk}) | \quad (7.6)$$

$$1 \leq k \leq n$$

Persamaan diatas merupakan generalization dari persamaan (1) dan (2) untuk n eksperimen, persamaan (7.6) menyatakan bahwa untuk sebuah search plan x_n , masing-masing dari eksperimen n dapat menjadi hasil terbesar, yaitu $1 \leq x \leq n$, ini menyatakan ada n interval ketidak tentuan akhir (I_n) yang mungkin dan harga-harga I_n ini dipilih harga terbesar (I_n)

PRINSIP MINIMAX (minimum & maksimum)

Dengan membandingkan search plan berdasarkan pada interval ketidak tentuan akhir terbesar, kita ingin memilih search plan terbaik, x_n yaitu sebuah serch plan yang mempunyai interval ketidak tentuan akhir terbesar yang terkecil

→ merupakan prinsip minimax yang dapat dituliskan sebagai

$$\boxed{In^* = In(X_n)^* = \min_{x_n} [In(x_n)]} \quad (7-7)$$

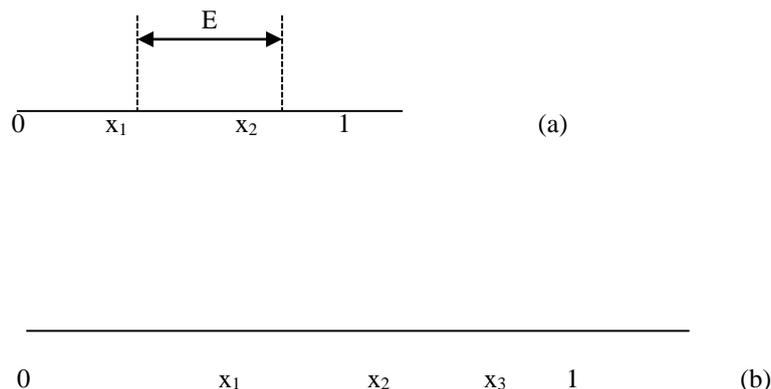
Disubstitusikan persamaan (7.6) ke (7.7)

$$\boxed{In^* = In(X_n)^* = \min_{X_n} \left\{ \max_{1 \leq k < n} [In(X_{n,k})] \right\}} \quad (7-8)$$

Persamaan (7.8) adalah pernyataan matematik dari perinsip minimax melihat persamaan di atas berarti perlu penelusuran pada semua serch plan x_n dengan x eksperimen untuk menentukan interval-interval ketidak tentuan akhir terbesarnya In kemudian serch plan dengan In terkecil dipilih sebagai yang terbaik untuk mengevaluasi interval ketidak tentuan akhir terbesar dari masing-masing search plan, perlu dipikirkan bahwa masing-masing dari eksperimen n , yaitu x_1, x_2, \dots, x_n mempunyai kemungkinan untuk hasil terbesar dari $y(x)$ ($1 \leq x \leq n$)

Dari sini kemudian didapat interval ketidak pastian yang mungkin In , yang mana dari harga-harga tersebut dapat dipilih yang terbesar.

Untuk menggambarkan prosedur tersebut di atas dijelaskan dalam kasus untuk 2 dan 3 eksperimen, sebagai berikut :



Gambar 7.14. (a),(b) Interval ketidaktentuan akhir untuk 2 eksperimen

Pada gambar 7.14(a) diatas dua eksperimen terletak pada suatu unit interval mula-mula dengan menggunakan persamaan (b) dapat ditulis interval ketidak tentuan akhir terbesar I_2 sehingga :

$$I_2 = \max (x_2, 1 - x_1) \quad (7-9)$$

Harga terkecil dan I_2 dapat diperoleh dengan meletakkan $x_1 = x_2$ sedekat mungkin dengan pusat interval sebagai contoh jika $x_1 = 0,4$ dan $x_2 = 0,8$ maka :

$$I_2 = \max (0,8,0,6) \rightarrow I_2 = 0,8$$

Jika $x_1 = 0,49$ dan $x_2 = 0,51$ maka :

$$I_2 = \max (0,51, 0,51) \rightarrow I_2 = 0,51$$

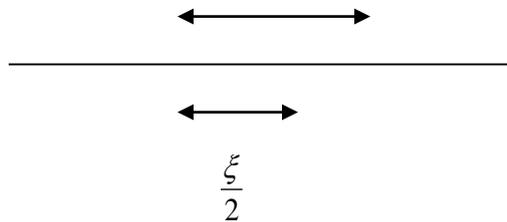
Adalah tidak mungkin untuk mempunyai $x_1 = x_2 = 0,5$ untuk $I_2 = 0,5$ karena $x_1 = x_2 = 0,5$ adalah titik yang sama karenanya hanya ada satu hasil, dan tidak memungkinkan untuk menentukan segmen mana dari interval yang akan dihilangkan, maka untuk memperoleh I_2 min, kita mendapatkan dua titik sedekat mungkin tapi masih dapat untuk menentukan beda hasil Y_1 dan Y_2 jarak terkecil antara dua titik ini disebut RESOLUSI (ξ)

Karenanya search plan terbaik untuk dua titik adalah menempatkan tiga titik tersebut pada interval secara simetris dan dipisahkan dengan resolusi. Interval akhir diperoleh dari persamaan (9) dengan $x_1 = 0,5 - \xi/2$ dan $x_2 = 0,5 + \xi/2$

$$\left[2 \quad \xi \quad 2 \right]$$

$$h^* = \max (0,5 + \xi/2, (1 - 0,5 - \xi/2))$$

$$h^* = 0,5 + \xi/2$$



Pada gambar (b) 3 buah titik diletakkan pada sebuah unit interval mula-mula. Dengan menggunakan persamaan (7-6) dapat ditulis interval ketidaktentuan akhir terbesar I_3 sebagai

$$I_3 = \max (x_2, x_3 - x_1, 1 - x_1) \quad (7-11)$$

Dengan memperhatikan persamaan (7-11) dapat dilihat bahwa nilai x_2 akan menentukan nilai I_3

Contoh :

$x_2 = 0,5 \rightarrow 1 - x_2 = 0,5$ dan nilai $I_3 = 0,5$ sepanjang nilai $(x_3 - x_1) \leq 0,5$ kenyataannya untuk kasus ini penempatan x_2 pada 0,5 adalah yang terbaik lalu nilai minimum I_3 adalah 0,5 x_1 dan x_3 dapat diletakkan

pada posisi sembarang asal nilainya $\leq 0,5$. cara mudah untuk menempatkan 3 titik adalah dengan jarak yang sama pada interval, yaitu 0,25 \rightarrow disebut uniform search.

Jika kedua minimax search plan dengan 2 dan 3 eksperimen dibandingkan interval-interval akhirnya adalah sebagai berikut :

$$I_2^* = 0,5 + 6/2$$

$$I_3^* = 0,5$$

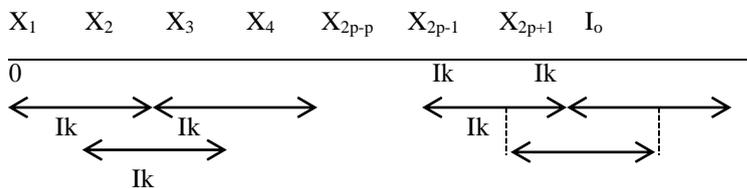
\rightarrow penempatan satu titik tambahan dapat mengurangi interval ketidak tentuan akhir hanya sebesar $e/2 \rightarrow$ pengurangan yang sangat kecil.

Metode Penyelesaian Secara Simultan

Dalam interval ketidak tentuan awal kita tempatkan sejumlah eksperimen (titik), misalkan sejumlah k titik.

Untuk jumlah titik ganjil

Missal ada p pasang titik \rightarrow jumlah titik $k = 2p+1$



Interval ketidak tentuan akhir :

$$(x_2 - 0), (x_3 - x_1), (x_4 - x_2), \dots, (x_{2p} - x_{2p-2}), (x_{2p+1} - x_{2p-1}), (I_0 - 1)$$

Genap

Tulis persamaan-persamaan untuk titik-titik pada posisi genap dengan I_k terbesar sebagai berikut

:

$$X_2 - 0 \leq I_k$$

$$X_4 - X_2 \leq I_k$$

$$X_6 - X_4 \leq I_k$$

.....

$$X_{2p} - X_{2p-2} \leq I_k$$

$$I_0 - X_{2p} \leq I_k$$

} jumlah persamaan = $p+1$

$$(7-13)$$

Bila sejumlah $(p+1)$ persamaan tersebut dijumlahkan : $I_0 \leq (p+1) I_k$ jadi

$$I_k \geq \frac{I_o}{(p+1)} \quad (7-15)$$

Nilai minimum dari I_k harus dipilih dan nilainya adalah

$$I_k = \frac{I_o}{(p+1)} \quad (7-16)$$

Jarak untuk titik-titik pada posisi genap (jarak optimum)

$$X_{2H} = h I_k^*, \text{ untuk } h = 1, 2, 3, \dots, p$$

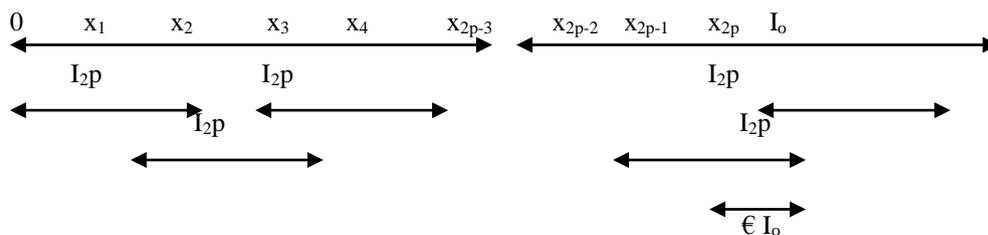
Titik-titik pada posisi ganjil ditempatkan di antara titik-titik pada posisi genap dengan catatan bahwa jarak diantara mereka tidak lebih dari I_k yang paling mudah adalah menempatkan titik tersebut pada jarak/interval yang sama dan dapat dituliskan dengan persamaan berikut :

$$x_j = j I_k^*/2 ; \text{ untuk } j = 1, 2, 3, \dots, k \quad (7-18)$$

atau

$$x_j = j \left(\frac{I_o}{P+1} \right) \text{ untuk } j = 1, 2, 3, \quad (7-19)$$

Untuk Jumlah titik genap



Jumlah pasangan = p

Jumlah titik = $2p$

Interval ketidak-tentuan akhir = I_{2p} , ditunjukkan oleh interval – interval sebagai berikut:

$$(x_2 - 0) \cdot (x_3 - x_1) \cdot (x_4 - x_2), \dots, (x_{2p} - x_{2p-p}), (I_o - x_{2p} - 1)$$

Persamaan – persamaan berikut menghubungkan titik-titik pada posisi genap dengan I_{2p} terbesar.

$$x_2 - 0 \leq I_{2p}$$

$$x_4 - x_2 \leq I_{2p}$$

$$x_6 - x_4 \leq I_{2p} \quad \dots$$

$$x_{ep} - x_{2p-2} \leq I_{2p} \quad (7-20)$$

Jumlah persamaan = p

Bila dijumlahkan, diperoleh

$$X_{2P} \leq p \cdot I_{2P} \quad (7-21)$$

Persamaan yang mengandung I_0 menyertakan titik ganjil X_{2P-1}

$$I_0 - X_{2P-1} \leq I_{2P} \quad (7-22)$$

Persamaan (21) dan (22) dijumlahkan \rightarrow

$$I_0 + X_{2P} - X_{2P-1} \leq (p+1) I_{2P} \quad (7-23)$$

Harga minimum dari I_{2P} harus dipilih

Untuk memperoleh harga I_{2P} minimum, maka X_{2P} dan X_{2P-1} harus dipisahkan dengan jarak sekecil mungkin (sependek mungkin) yaitu $\epsilon I_0 \rightarrow$ disebut resolusi : $\epsilon =$ fraksi dari interval sehingga persamaan (7.23) menjadi :

$$I_0 + \epsilon I_0 \leq (p+1) I_{2P}$$

$$I_0 + \epsilon I_0 = (p+1) I_{2P}^* \quad (7-24)$$

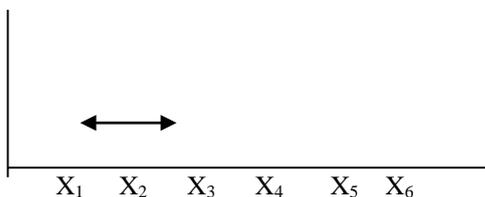
Dengan demikian I_{2P}^* adalah :

$$I_{2P}^* = \frac{I_0 + \xi I_0}{(p+1)} = \frac{(1+\xi)I_0}{1+P} \quad (7-25)$$

Persamaan 7.16. $I_k^* = \frac{I_0}{p+1}$ berbeda !

Untuk jumlah titik genap, search dengan pasangan titik seragam uniform pairs. Titik – titik yang menempati posisi genap berada pada interval sesuai dengan persamaan 7.25 :

$$y = h (1 + \epsilon) I_0 / (p+1) \text{ untuk } h = 1, 2, 3, \dots \quad (7-26)$$



Titik – titik pada posisi ganjil diletakkan pada sebelah kiri genap dan dipisahkan dengan jarak sebesar resolusi π ditunjukkan persamaan berikut :

$$X_{2h-1} = X_{2h} - \epsilon I_o \text{ untuk } h = 1,2,3 \quad (7-27)$$

Substitusikan persamaan 7-26 (X_{2H}) kepersamaan 7-27, maka diperoleh persamaan untuk menghitung lokasi titik-titik ganjil :

$$\begin{aligned} X_{2h-1} &= h(1+\epsilon) I_o / (p+1) - \epsilon I_o \\ &= \frac{h(1 + \xi)I_o - \xi I (p + 1)}{(p + 1)} \\ &= \frac{[h(1 + \xi) - \xi(0 + 1)]I_o}{(p + 1)} \\ &= (h + h\epsilon - \epsilon p - \epsilon) I_o / (p+1) \end{aligned}$$

$$X_{2h-1} = (h-(p+1-h)\epsilon) I_o / (p+1) \text{ untuk } h = 1,2,3, \quad (7-28)$$

Perbandingan dari persamaan-persamaan interval ketidak-tentuan akhir untuk jumlah titik genap dan ganjil dapat diberikan dengan membuat persamaan 7-25 untuk jumlah titik genap dan persamaan 7-16 untuk jumlah titik ganjil.

$$\text{Genap : } I_{2p}^* = \frac{I_o}{(p+1)} + \frac{\xi I_o}{(p+1)} \quad (7-29)$$

$$\text{Ganjil : } I_{2p+1} = \frac{I_o}{(p+1)} \quad (7-30)$$

Jadi penambahan sebuah titik hanya mengurangi panjang ketidak-tentuan aktivasi sebesar $\epsilon I_o / (p+1)$, yaitu bilangan yang cukup kecil.

Contoh soal

Carilah nilai maksimum untuk fungsi : $y = 3 + 6x - 4x^2$ pada $0 \leq x \leq 1,0$ dengan menggunakan metoda searah dengan pasangan titik-titik yang seragam (uniform fairs) dengan 4 eksperimen dan uniform search dengan 5 titik interval mula-mula adalah 1 dan $\epsilon = 0,05$. bandingkan panjang dan lokasi dari materi ketidak-tentuan aktivasinya juga bandingkan harga maksimumnya dengan harga yang diperoleh dengan teori klasik maksimum dan minimum.

Penyelesaian :

$$\text{Max : } y = 3 + 6x - 4x^2 \text{ pada } 0 \leq x \leq 1$$

Untuk 4 titik $p = 2$

Lokasi titik-titik ditentukan dengan persamaan (7.26) dan (7.28) untuk $h=1$

$$x_2 = \frac{(1 + \xi)I_o}{(p+1)} = \frac{(1 + 0,05)(1,0)}{(2 + 1)} = 0,35$$

$$x_1 = \frac{[1 - (p+1-1)\xi]I_o}{(p+1)}$$

$$= \frac{[1 - (2 + 1 - 1)(0,05)](1,0)}{(2 + 1)} = 0,30$$

Dan x_2 dipisahkan dengan jarak resolusi $\epsilon I_o = (0,05)(1,0) = 0,05$

Cara yang sama untuk $h = 2$, didapat

$$X_4 = 0,7$$

$$X_3 = 0,65$$

Dengan demikian posisi keempat titik sudah diketahui kemudian evaluasi dilakukan pada titik-titik tersebut :

$$G(0,30) = 3 + 6(0,30) - 4(0,30)^2 = 4,44$$

$$G(0,35) = 3 + 6(0,35) - 4(0,35)^2 = 4,6$$

$$G(0,65) = 3 + 6(0,65) - 4(0,65)^2 = 5,21$$

$$G(0,7) = 3 + 6(0,7) - 4(0,7)^2 = 5,24$$

$$G(1) = 3 + 6(1) - 4(1)^2 = 5$$

Panjang dan lokasi dari interval ketidak tentuan aktif adalah :

$$I_4^* = I_o / (p+1) + \epsilon I_o / (p+1)$$

$$= 1/(2+1) + (0,05) (1) / (2+1)$$

$$= 0,35$$

$$0,35 \leq x^* < 1,0 \text{ bukannya } 0,65 \leq x^* < 1,0$$

Untuk 5 buah titik simultan (dengan jarak yang sama), lokasi titik-titik tersebut ditentukan dengan persamaan (19)

$$\text{Untuk } j = 1 \rightarrow x_1 = \frac{I_o}{a(p+1)} = \frac{(1,0)}{2(2+1)} = \frac{1}{6}$$

Untuk $j = 2, 3, 4$, dan 5 masing-masing adalah

$$x_2 = \frac{1}{3} \quad x_3 = \frac{1}{2} \quad x_4 = \frac{2}{3} \quad x_5 = \frac{5}{6}$$

Evaluasi fungsi memberikan :

$$y\left(\frac{1}{6}\right) = 3 + 6\left(\frac{1}{6}\right) - 4\left(\frac{1}{6}\right)^2 = 3,98$$

$$y\left(\frac{1}{3}\right) = 3 + 6\left(\frac{1}{3}\right) - 4\left(\frac{1}{3}\right)^2 = 4,56$$

$$y\left(\frac{1}{2}\right) = 3 + 6\left(\frac{1}{2}\right) - 4\left(\frac{1}{2}\right)^2 = 5,00$$

$$y\left(\frac{2}{3}\right) = 3 + 6\left(\frac{2}{3}\right) - 4\left(\frac{2}{3}\right)^2 = 5,22$$

$$y\left(\frac{5}{6}\right) = 3 + 6\left(\frac{5}{6}\right) - 4\left(\frac{5}{6}\right)^2 = 5,22$$

$$y(1) = 3 + 6(1) - 4(1)^2 = 5$$

Panjang dan lokasi dari interval ketidak tentuan akhir =

$$I_5^* = I_0 / (p+1) = (1,0) / (2+1) = \frac{1}{3}$$

$$\frac{2}{3} \leq x^* \leq 1$$

Perbedaan I^* untuk 4 dan 5 titik :

$0,35 \cdot 0,33 = 0,017$ dalam hal ini sama dengan

$$\epsilon I_0 / (p+1) = (0,05)(1) / (2+1) = 0,017$$

Lihat persamaan 29 dan 30

Harga optimum dengan metoda klasik

$$y = 3 + 6x - 4x^2 \qquad y_{\max} = 3 + 6\left(\frac{3}{4}\right) = 5,25$$

$$dy = 0 = 0 + 6 - 8x \rightarrow x = \frac{3}{4}$$

Metode	y_{\max}
Klasik	5,25
Search 4 titik	5,24
Search 5 titik	5,22

A. Evaluasi

1. Jelaskan pengertian Optimasi
2. Jelaskan system yang bagaimana dapat dioptimasi.
3. Jelaskan beda antara kondisi optimum dan kondisi maksimum

4. Buatlah contoh optimasi dalam suatu sistem

B. Buku Sumber, Bacaan Pendukung

Douglas, J.M., 1988, "conceptual Design of Chemical Processes"

H.S. Carslaw & J.C. Jaeger, 1959, "Conduction of Heat in solids", Oxford University Press

R.B. Bird, W.E. Stewart & E.N. Lightfoot, 1965, "Transport Phenomena, Jhon Wiley".

Rudd, D.F., and Watson, C.C., 1968, "Strategy of Process Engineering", John Wiley and Sons, Inc., New York

Tjipto Utomo, 1981, "Pengantar Peristiwa Perpindahan", Proyek kerjasama JTA-9A Departemen Teknologi Kimia, ITB- Universitas Teknologi Twente di Naderland

Townsend, D.W., and Linnhoff, B., 1982, "Designing Total Energy System by Systematic Methode", Chem. Eng. No.378, London

W.J. Beek & K.M.K. Mutzall, Transport Phenomena, Jhon Wiley, 1975.

W.H. McAdams, Heat Transmission, McGram-Hill, 1954



REPUBLIK INDONESIA
KEMENTERIAN HUKUM DAN HAK ASASI MANUSIA

SURAT PENCATATAN CIPTAAN

Dalam rangka perlindungan ciptaan di bidang ilmu pengetahuan, seni dan sastra berdasarkan Undang-Undang Nomor 28 Tahun 2014 tentang Hak Cipta, dengan ini menerangkan:

Nomor dan tanggal permohonan : EC00202110188, 6 Februari 2021

Pencipta

Nama : **KGS. A. RONI dan Netty Herawati**
Alamat : KOMPLEK SANGKURIANG BLOK K-9 RT/RW 060/023 KEL/DESA
SAKO KECAMATAN SAKO, PALEMBANG, SUMATERA
SELATAN, 30163
Kewarganegaraan : Indonesia

Pemegang Hak Cipta

Nama : **KGS. A. RONI dan Netty Herawati**
Alamat : KOMPLEK SANGKURIANG BLOK K-9 RT/RW 060/023 KEL/DESA
SAKO KECAMATAN SAKO, PALEMBANG, SUMATERA
SELATAN, 30163
Kewarganegaraan : Indonesia
Jenis Ciptaan : **Buku**
Judul Ciptaan : **ANALISIS SISTIM TEKNIK KIMIA**
Tanggal dan tempat diumumkan untuk pertama kali : 1 Februari 2020, di Palembang
di wilayah Indonesia atau di luar wilayah Indonesia
Jangka waktu perlindungan : Berlaku selama hidup Pencipta dan terus berlangsung selama 70 (tujuh
puluh) tahun setelah Pencipta meninggal dunia, terhitung mulai tanggal 1
Januari tahun berikutnya.
Nomor pencatatan : 000237347

adalah benar berdasarkan keterangan yang diberikan oleh Pemohon.
Surat Pencatatan Hak Cipta atau produk Hak terkait ini sesuai dengan Pasal 72 Undang-Undang Nomor 28 Tahun 2014 tentang Hak Cipta.



a.n. MENTERI HUKUM DAN HAK ASASI MANUSIA
DIREKTUR JENDERAL KEKAYAAN INTELEKTUAL

Dr. Freddy Harris, S.H., LL.M., ACCS.
NIP. 196611181994031001

Disclaimer:

Dalam hal pemohon memberikan keterangan tidak sesuai dengan surat pernyataan, menteri berwenang untuk mencabut surat pencatatan permohonan.